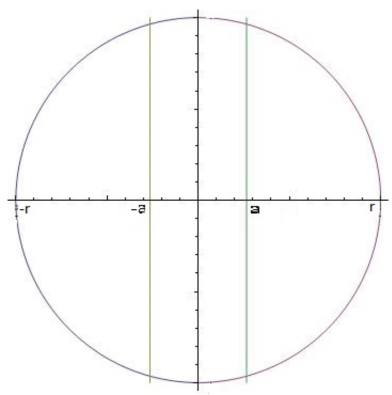
Un problema que inquietaba a los auxiliares.
Por Ingeniero Carlos A. Angulo H.
Profesor titular departamento de matemática.
Facultad de Ingeniería, Universidad de San Carlos de Guatemala
Editado por: José A. Ligorría T.

El siguiente problema inquietaba a los auxiliares del departamento: Se tiene una pizza y se desea cortar en 3 partes, no en forma tradicional, sino usando cortes verticales (imagine un círculo que es cortado por rectas verticales) de tal forma que cada uno de los cortes tenga igual área; ¿a qué distancia $x = a$ del centro de la pizza debe hacerse el corte para cumplir la condición?

Me pareció interesante, y he encontrado la siguiente solución.

Supongamos que la pizza tiene radio igual a r.



Lo primero que hice fue observar la figura, lo que me llevó a plantear la siguiente integral:

$\int_a^r \sqrt{r^2 - x^2}dx = \dfrac{1}{6}\pi r^2$, esta integral representa el hecho que el área de la porción de pizza desde el corte y el eje horizontal hasta la frontera de la pizza, es en efecto la sexta parte del área de la pizza.

$\int_a^r \sqrt{r^2 - x^2}dx$, está integrar se resuelve usando la sustitución $x = rsen(\theta)$, que me lleva a:

$\int_a^r \sqrt{r^2 - x^2}dx = r^2 \int_{x=a}^{x=r} cos^2(\theta)d\theta = \dfrac{1}{6}\pi r^2$

$r^2 \int_{x=a}^{x=r} cos^2(\theta)d\theta = \dfrac{r^2}{2}\left(\int_{x=a}^{x=r}(1 + cos(2\theta))d\theta\right) = \dfrac{1}{6}\pi r^2$ lo que me lleva a la antiderivada:

$\left[\theta+\frac{1}{2}sen(2\theta)\right]_{x=a}^{x=r}=\dfrac{\pi}{3}$, puesto que los límites de integración están en variable cartesiana, los llevamos a la variable θ.

$\left[\theta+\frac{1}{2}sen(2\theta)\right]_{arcsen(\frac{a}{r})}^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi}{3}$, lo que nos lleva a:

$\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{2}sen\pi)-arcsen(\frac{a}{r})-\dfrac{1}{2}sen(2arcsen(\frac{a}{r}))=\dfrac{\pi}{3}$, de donde:

$arcsen(\frac{a}{r})+\dfrac{1}{2}sen(2arcsen(\frac{a}{r}))=\dfrac{\pi}{6}$, el valor $\dfrac{\pi}{6}$ vuelve a aparecer luego de la evaluación de los límites de integración, si hacemos $u=arcsen(\frac{a}{r})$ la igualdad se convierte en:

$$u+\frac{1}{2}sen(2u)=\frac{\pi}{6}$$, multiplicando por 2 tenemos:

$$2u+sen(2u)=\frac{\pi}{3}$$, hacemos $\nu=2u$, y eso nos lleva a:

$$\nu+sen(\nu)=\frac{\pi}{3}$$, esto nos lleva al problema de hallar la raíz de la función

$f(\nu)=\nu+sen(\nu)-\dfrac{\pi}{3}$, que se resuelve usando métodos numéricos. Aplicaremos el método de Newton; ¡QUE EMOCIONANTE, UN PROBLEMA DE PIZZA NOS HA LLEVADO A APLICAR: ÁREAS, TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN Y POR ÚLTIMO MÉTODOS NUMÉRICOS!

Newton dice: $\nu_{n+1}=\nu_n-\dfrac{f(\nu_n)}{D_\nu f(\nu_n)}$, lo que nos llevó a valores ν_n siguientes:
$\nu_0=0$, valor de arranque

$\nu_1\approx 0{,}5236$

$\nu_2\approx 0{,}5362$

$\nu_3\approx 0{,}5362$

Regresando a las sustituciones previas tenemos: $u\approx 0{,}2681$
$0{,}2681\approx arcsen(\frac{a}{r})\Leftrightarrow\dfrac{a}{r}=sen(0{,}2681)$
Lo que finalmente genera $a=rsen(0{,}2681)=0{,}2649*r$.
Al hacer $r=1$, el corte debe hacerse en $x=0{,}2649$.

Con esta solución, espero que los auxiliares tengan paz al cortar la pizza.