

# Primer Trabajo Especial

## Algebra y geometría de complejos

Prof. José Saquimux

### Objetivo

Ilustrar el uso del algebra y representaciones graficas de complejos, y sistemas algebraicos por computadora (SAC) en el estudio, análisis y descripción de algunas cantidades y dispositivos electricos ac elementales.

### Elaboracion y entrega

Realizar las actividades solicitadas en grupos de trabajo colaborativo de no más de tres integrantes. Fecha de entrega: Lunes 13/ de marzo / 2017.

### Desarrollo y presentación del reporte

Los textos explicativos, fórmulas, gráficas, etc. que se requieran; deben crearse, ejecutarse y presentarse en un sistema de algebra computacional (el que prefiera).

## Corriente neutral en un sistema trifásico

### 1. Tres fases en uso, cargas balanceadas

La Figura 1 muestra el esquema de un sistema trifásico de corriente alterna **Y** con neutro aterrizado balanceado,

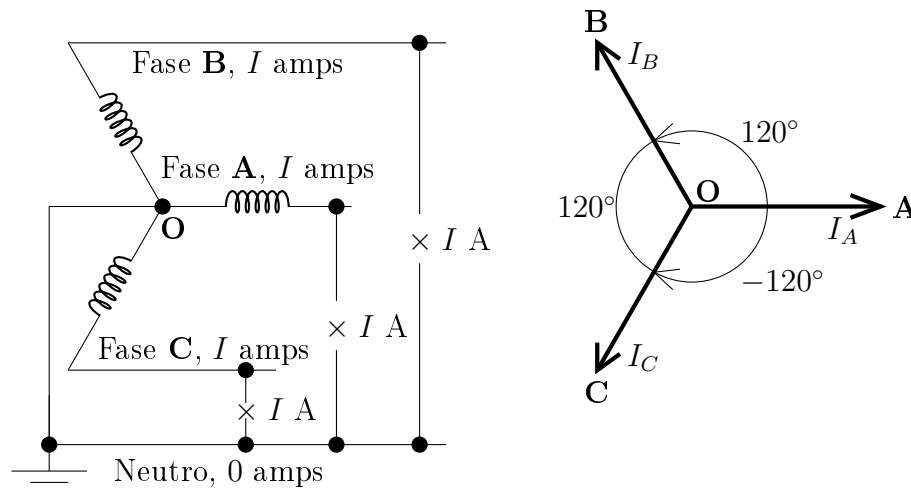


Figura 1: Tres fases en uso, cargas balanceadas.

Las corrientes alternas en cada fase tienen la misma magnitud  $I$  y están desfasadas entre sí  $120^\circ = 2\pi/3$ .

$$i_A(t) = I \sin(\omega t), \quad i_B(t) = I \sin(\omega t + 2\pi/3), \quad i_C(t) = I \sin(\omega t - 2\pi/3) \quad (1)$$

Esas corrientes pueden representarse como fasores (números complejos) y visualizarse como tres vectores de posición (su cola en el origen) y con rotaciones equiangulares entre ellos en el plano complejo, Fig. 1.

$$\tilde{I}_A = I\angle 0^\circ, \tilde{I}_B = I\angle 120^\circ, \tilde{I}_C = I\angle -120^\circ \quad (2)$$

Donde los módulos de los fasores o longitudes de los vectores representan las amplitudes de la corrientes y los argumentos o ángulos de los fasores representan los ángulos de desfase de las corrientes en  $\omega t$ .

Si  $i_N(t)$  denota la corriente neutral, por la ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo **O**, en el tiempo, se cumple,

$$i_a(t) + i_b(t) + i_c(t) + i_n(t) = 0 \quad (3)$$

$$I \sin(\omega t) + I \sin(\omega t + 2\pi/3) + I \sin(\omega t - 2\pi/3) + i_n(t) = 0 \quad (4)$$

Si  $\tilde{I}_N$  denota el fasor de corriente neutral, por la ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo **O**, con fasores, se cumplen las ecuaciones fasoriales,

$$\tilde{I}_A + \tilde{I}_B + \tilde{I}_C + \tilde{I}_N = 0 \quad (5)$$

$$I\angle 0^\circ + I\angle 120^\circ + I\angle -120^\circ + I_N\angle \theta = 0 \quad (6)$$

## Actividades

(Nota: Según el cálculo o gráfica, debe decidir si trabaja en modo **Deg** o **Rad**)

1. Usando identidades trigonométricas del seno de una suma y resta de ángulos, de la Ecuación (4) muestre que un sistema balanceado  $i_N(t) = 0$ .
2. Usando SAC, en un mismo sistema de coordenadas grafique  $i_A(t), i_B(t), i_C(t)$ , y  $i_N(t) = -(i_A(t) + i_B(t) + i_C(t))$  y verifique que de la Ecuación (4),  $i_N(t) = 0$  (debe graficar con  $\omega t$  como variable independiente y suponer un valor concreto para  $I$ ,  $-2\pi \leq \omega t \leq 2\pi$ )
3. Usando operaciones con complejos, de la Ecuación (6) muestre que en un sistema trifásico balanceado, el fasor corriente neutral  $I_N\angle \theta = 0$
4. Usando SAC para graficar los fasores de corriente y su suma en el plano complejo, de la Ecuación (6) ilustre que  $I_N\angle \theta = 0$  (suponga un valor concreto para  $I$ )

## 2. Dos fases en uso, cargas balanceadas

La Figura 2 muestra el esquema de un sistema trifásico de corriente alterna **Y** con neutro aterrizado, dos fases en uso y cargas balanceadas,

Las corrientes alternas en las fases *A* y *B* tienen la misma magnitud  $I$ , mientras que la magnitud de la corriente en la fase *C* gradualmente se aumenta para valores menores que  $I$ .

$$i_A(t) = I \sin(\omega t), i_B(t) = I \sin(\omega t + 2\pi/3), i_C(t) = I_C \sin(\omega t - 2\pi/3), \text{ con } 0 \leq I_C < I \quad (7)$$

Esas corrientes se visualizan como fasores en el plano complejo, Fig. 2.

$$\tilde{I}_A = I\angle 0^\circ, \tilde{I}_B = I\angle 120^\circ, \tilde{I}_C = I_C\angle -120^\circ, \text{ con } 0 \leq I_C < I \quad (8)$$

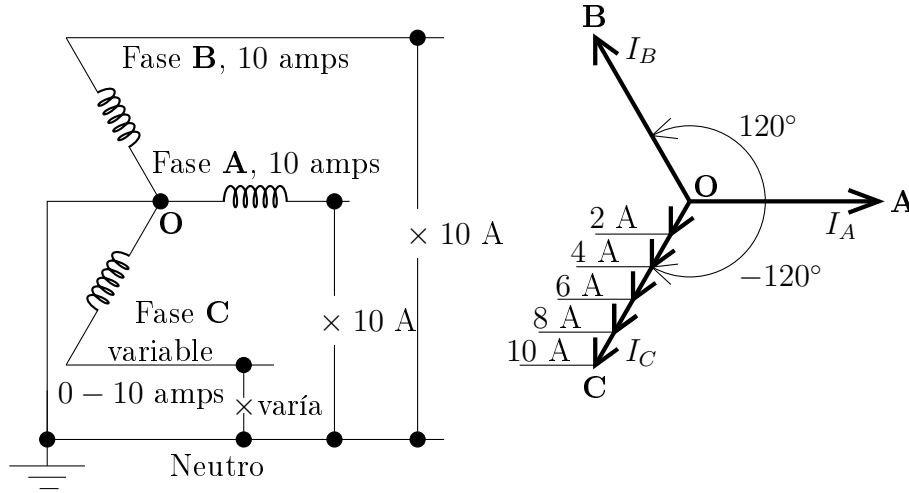


Figura 2: Dos fases en uso, cargas balanceadas.

Por la ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo **O**, en el tiempo, se cumple,

$$i_a(t) + i_b(t) + i_c(t) + i_n(t) = 0 \quad (9)$$

$$I \sin(\omega t) + I \sin(\omega t + 2\pi/3) + I_C \sin(\omega t - 2\pi/3) + i_n(t) = 0, \text{ con } 0 \leq I_C < I \quad (10)$$

En forma fasorial se tiene,

$$\tilde{I}_A + \tilde{I}_B + \tilde{I}_C + \tilde{I}_N = 0 \quad (11)$$

$$I\angle 0^\circ + I\angle 120^\circ + I_C\angle -120^\circ + I_N\angle \theta = 0, \text{ con } 0 \leq I_C < I \quad (12)$$

## Actividades

1. Usando identidades trigonométricas del seno de una suma y resta de ángulos, de la Ecuación (10) muestre que un sistema no balanceado  $i_N(t) \neq 0$ , cuando  $0 \leq I_C < I$ .
2. Suponga  $I = 10$  y valores de  $I_C$  en  $0 \leq I_C < 10$ . Usando SAC (en modo dinámico o con deslizadores), en un mismo sistema de coordenadas grafique  $i_A(t)$ ,  $i_B(t)$ ,  $i_C(t)$ , y  $i_N(t) = -(i_A(t) + i_B(t) + i_C(t))$ , describa la variación y determine el intervalo de variación de la amplitud de  $i_N(t)$  al variar  $I_C$  en el intervalo indicado. Determine si varía su ángulo de desfase de  $I_N$  y que valor toma aproximadamente (*debe graficar con  $\omega t$  como variable independiente,  $-2\pi \leq \omega t \leq 2\pi$* )
3. Suponga  $I = 10$  y  $0 \leq I_C < 10$ . Usando SAC (elaborando tabla de valores) a partir de la Ecuación (12)  $I_N\angle \theta = -(I\angle 0^\circ + I\angle 120^\circ + I_C\angle -120^\circ)$ ; con  $0 \leq I_C < I$  determine algunos valores que toma la amplitud de  $I_N$  (use comando **abs**) y su fase (use comando **arg**), al variar  $I_C$  en el intervalo indicado. Haga las gráficas de  $\text{abs}(I_N)$  en función de  $I_C$  y  $\text{arg}(I_N)$  en función de  $I_C$ .
4. Usando SAC para graficar los fasores de corriente (vectores) y su suma en el plano complejo, de la Ecuación (6) ilustre gráficamente las variaciones de  $I_C\angle -120^\circ$  e  $I_N\angle \theta$

## 2. Dos fases en uso, cargas no balanceadas

La Figura 3 muestra el esquema de un sistema trifásico de corriente alterna **Y** con neutro aterrizado y dos fases en uso y cargas no balanceadas,

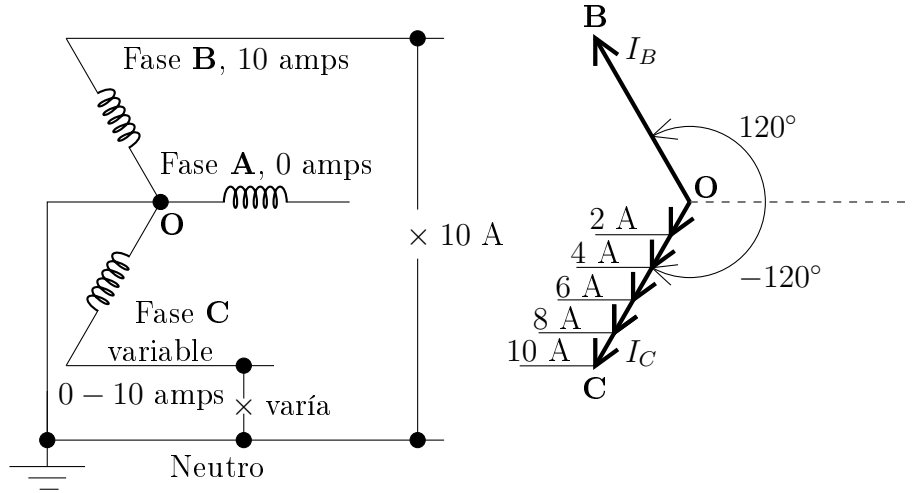


Figura 3: Dos fases en uso, cargas no balanceadas.

La magnitud de la corrientes en la fase  $B$  es de 10 amps. La corriente en la fase  $A$  es cero, mientras que la magnitud de la corriente en la fase  $C$  gradualmente se aumenta para valores en  $0 \leq I_C < 10$ .

$$i_A(t) = 0, i_B(t) = 10 \sin(\omega t + 2\pi/3), i_C(t) = I_C \sin(\omega t - 2\pi/3), \text{ con } 0 \leq I_C < 10 \quad (13)$$

Esas corrientes se visualizan como fasores en el plano complejo, Fig. 3.

$$\tilde{I}_A = 0, \tilde{I}_B = 10 \angle 120^\circ, \tilde{I}_C = I_C \angle -120^\circ, \text{ con } 0 \leq I_C < 10 \quad (14)$$

Por la ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo **O**, en el tiempo, se cumple,

$$i_b(t) + i_c(t) + i_n(t) = 0 \quad (15)$$

$$10 \sin(\omega t + 120^\circ) + I_C \sin(\omega t - 120^\circ) + i_n(t) = 0, \text{ con } 0 \leq I_C < 10 \quad (16)$$

En forma fasorial se tiene,

$$\tilde{I}_B + \tilde{I}_C + \tilde{I}_N = 0 \quad (17)$$

$$10 \angle 120^\circ + I_C \angle -120^\circ + I_N \angle \theta = 0, \text{ con } 0 \leq I_C < 10 \quad (18)$$

### Actividades

1. Usando identidades trigonométricas del seno de una suma y resta de ángulos, de la Ecuación (16) determine la expresión de  $i_N(t)$ , cuando  $0 \leq I_C < 10$ .

2. Suponga  $I_B = 10$  y valores de  $I_C$  en  $0 \leq I_C < 10$ . Usando SAC (en modo dinámico o con deslizadores), en un mismo sistema de coordenadas grafique  $i_B(t)$ ,  $i_C(t)$ , y  $i_N(t) = -(i_B(t) + i_C(t))$ , describa la variación y determine el intervalo de variación de la amplitud de  $i_N(t)$  al variar  $I_C$  en el intervalo indicado. Determine si varía su ángulo de desfase de  $I_N$  y qué valores toman aproximadamente (*debe graficar con  $\omega t$  como variable independiente  $-2\pi \leq \omega t \leq 2\pi$* )
3. Suponga  $I_B = 10$  y  $0 \leq I_C < 10$ . Usando SAC (elaborando tabla de valores) a partir de la Ecuación (18)  $I_N \angle \theta = -(10 \angle 120^\circ + I_C \angle -120^\circ)$ ; con  $0 \leq I_C < I$  determine algunos valores que toma la amplitud de  $I_N$  (use comando **abs**) y su fase (use comando **arg**), al variar  $I_C$  en el intervalo indicado. Haga las gráficas de  $\text{abs}(I_N)$  en función de  $I_C$  y  $\text{arg}(I_N)$  en función de  $I_C$ , y determine el menor valor que toma  $I_N$ . (*varíe  $I_C$  de 10 en 10*)
4. Usando SAC para graficar los fasores de corriente y su suma en el plano complejo, de la Ecuación (6) ilustre gráficamente las variaciones de  $I_C \angle -120^\circ$  e  $I_N \angle \theta$ .
5. Suponga  $I_A = 3$ ,  $I_B = 10$  y  $0 \leq I_C < 10$ . Usando SAC (elaborando tabla de valores) a partir de la ecuación  $I_N \angle \theta = -(3 + 10 \angle 120^\circ + I_C \angle -120^\circ)$ ; con  $0 \leq I_C < I$  determine algunos valores que toma la amplitud de  $I_N$  (use comando **abs**) y su fase (use comando **arg**), al variar  $I_C$  en el intervalo indicado. Haga las gráficas de  $\text{abs}(I_N)$  en función de  $I_C$  y  $\text{arg}(I_N)$  en función de  $I_C$ , y determine el menor valor que toma  $I_N$ .
6. Suponga  $I_A = 8$ ,  $I_B = 10$  y  $0 \leq I_C < 10$ . Usando SAC (elaborando tabla de valores) a partir de la ecuación  $I_N \angle \theta = -(8 + 10 \angle 120^\circ + I_C \angle -120^\circ)$ ; con  $0 \leq I_C < I$  determine algunos valores que toma la amplitud de  $I_N$  (use comando **abs**) y su fase (use comando **arg**), al variar  $I_C$  en el intervalo indicado. Haga las gráficas de  $\text{abs}(I_N)$  en función de  $I_C$  y  $\text{arg}(I_N)$  en función de  $I_C$ , y determine el menor valor que toma  $I_N$ .

### 3. Sistema trifásico no balanceado operando a diferentes factores de potencia

En los anteriores problemas hemos supuesto que los ángulos de desfase de corrientes eran  $0^\circ$ ,  $120^\circ$  y  $-120^\circ$ , en este caso se dice que los factores de potencia de las cargas por fase son iguales a 1. En la práctica los factores de potencia no son iguales a 1, es decir los ángulos de desfase entre ellas no es igual a  $120^\circ$ . Suponga un sistema trifásico no balanceado con factores de potencia no iguales a 1, (el desfase entre ellas no es  $120^\circ$ .)

$$i_A(t) = 4 \cos(\omega t - 10\pi/180), i_B(t) = 10 \cos(\omega t + 125\pi/180), i_C(t) = I_C \cos(\omega t - 100\pi/180) \quad (19)$$

con  $0 \leq I_C \leq 12$

#### Actividades

1. Suponga que  $I_C$  en  $0 \leq I_C < 12$ . Usando SAC (en modo dinámico o con deslizadores), en un mismo sistema de coordenadas grafique  $i_A(t)$ ,  $i_B(t)$ ,  $i_C(t)$ , y  $i_N(t) = -(i_A(t) + i_B(t) + i_C(t))$ , describa la variación y determine el intervalo de variación de la amplitud de  $i_N(t)$  al variar  $I_C$  en el intervalo indicado. Determine si varía su ángulo de desfase de  $I_N$  y qué valores toman aproximadamente (*debe graficar con  $\omega t$  como variable independiente  $-2\pi \leq \omega t \leq 2\pi$* )
2. Suponga que  $0 \leq I_C < 12$ . Usando SAC (elaborando tabla de valores) a partir de la Ecuación (18)  $I_N \angle \theta = -(4 \angle -10^\circ + 10 \angle 125^\circ + I_C \angle -100^\circ)$ ; con  $0 \leq I_C < 10$  determine algunos valores que toma la amplitud de  $I_N$  (use comando **abs**) y su fase (use comando **arg**), al variar  $I_C$  en el intervalo indicado. Haga las gráficas de  $\text{abs}(I_N)$  en función de  $I_C$  y  $\text{arg}(I_N)$  en función de  $I_C$ , y determine el menor valor que toma  $I_N$ .

# Diagrama fasorial de una línea de transmisión corta

La Figura 4 muestra el circuito equivalente de una línea corta (menos de 80 Kms. aproximadamente, a 60 Hz) de transporte de transmisión de energía eléctrica, donde  $I_S$  e  $I_R$  son, respectivamente, las corrientes en los extremos transmisor y receptor y  $V_S$  y  $V_R$  las tensiones entre fase y neutro en esos mismos puntos.

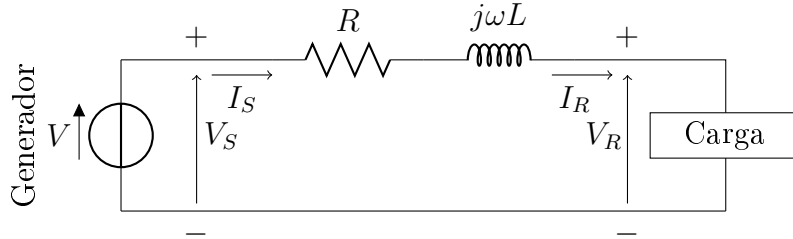


Figura 4: Circuito equivalente de una línea de transporte corta.

Puesto que  $I_S = I_R$ , tomando  $V_R$  como fador de referencia, y suponiendo la corriente en extremo receptor  $I_R \angle \theta$ , la tensión en el extremo distribuidor es,

$$V_S = V_R + I_R \angle \theta Z \quad (20)$$

$$V_S = V_R + I_R \angle \theta (R + j\omega L) \quad (21)$$

$$V_S = V_R + RI_R \angle \theta + jXI_R \angle \theta \quad (22)$$

donde  $X = \omega L$ ,

Suponiendo la corriente en el extremo receptor en retraso, un diagrama fasorial correspondiente a la Ecuación (22) se ilustra en la Figura 5.

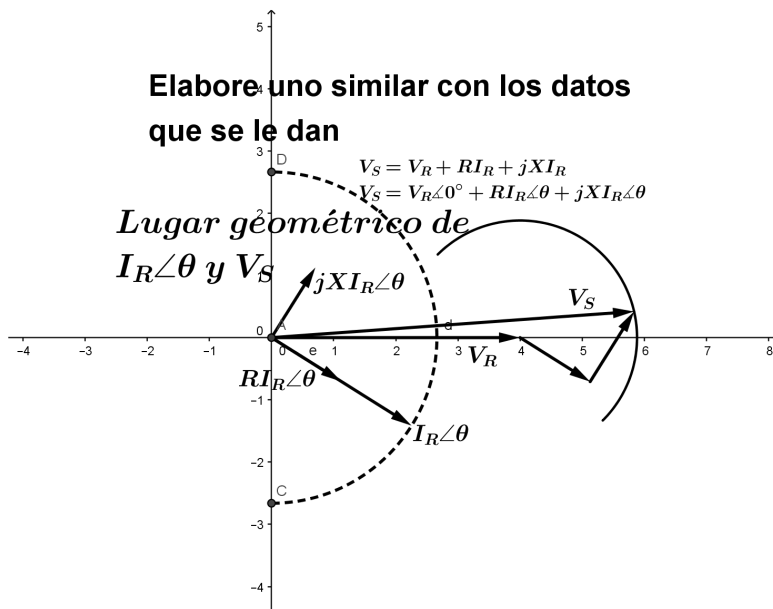


Figura 5: Diagrama fasorial de una línea corta.

## Actividades

Suponga los siguientes valores ideales:  $|V_R| = 8$ ,  $|I_R| = 4$ ,  $R = 1/2$ ,  $X = 1$  y  $\theta$  variable en el intervalo  $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ .

1. Usando la Ecuación (22), elabore una tabla de valores numéricos que presente valores de:  $\theta$ ,  $|V_S|$  y  $\angle V_S$ , cuando  $\theta$  varía en  $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ , tomando valores de  $10^\circ$  en  $10^\circ$ .
  2. Usando sus valores encontrados, haga las gráficas de  $|V_S|$  y  $\angle V_S$  en función de  $\theta$ .
  3. Usando GeoGebra u otro software, elabore el diagrama fasorial de la Ecuación (22) con los datos proporcionados, similar al de la Figura 5. Su diagrama debe ser **dinámico e interactivo**, que permita visualizar los lugares geométricos de la corriente  $I_R \angle \theta$  y  $V_S$  (los semicírculos que generan las puntas de los fasores al variar  $\theta$ , en intervalo indicado). Debe presentar copias cuando:  $\theta = 90^\circ$ ,  $-90^\circ < \theta < 0^\circ$ ,  $\theta = 0^\circ$ ,  $0^\circ < \theta < 90^\circ$  y  $\theta = 90^\circ$ .
  4. De los valores calculados y gráficas, determine los valores de  $\theta$  que hacen que  $|V_S|$  tome su menor y mayor valor.
- 

## Referencias

1. <http://www.geogebra.org>
  2. Grainger, J., Stevenson, W. (1996) *Análisis de sistemas de potencia*. México. McGraw Hill-Interamericana de México, S.A.
  3. McPartland, J. F. (1970) *How to make electrical calculations*. New York. USA. Published by Electrical Construction and Maintenance. MacGraw-Hill Publication.
  4. Saadat, H. (1999) *Power System Analysis*. WCB/McGraw-Hill. USA
-