UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-101-1-M-1-00-2017

CURSO	**Matemática Básica 1**
SEMESTRE	**Primer Semestre**
CÓDIGO DEL CURSO	**101**
TIPO DE EXAMEN	**Primer Parcial**
FECHA DE EXAMEN	**23 de febrero de 2017**
RESOLVIÓ EL EXAMEN	**Freddy Lorenti**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN	**Freddy Lorenti**
REVISÓ EL EXAMEN	**Inga. Ericka Cano**
COORDINADOR	**Ing. José Alfredo González Díaz**

Primer examen parcial

Temario A

Tema 1(30 puntos)

Resuelva:

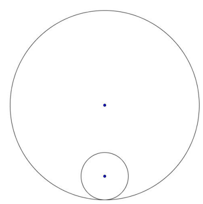
a. $\sqrt{1+8x}+1=\sqrt{9x+4}$ b. $3y^{1/6}-2y^{1/3}-1=0$ c. $\dfrac{x^2+x-3}{x+1}\leq\dfrac{3x-6}{x+2}$

Tema 2(15 puntos)

Una compañía de telefonía celular cobra una cuota mensual de Q 80 por los primeros 1000 mensajes de texto y Q 0.80 por cada mensaje adicional. La cuenta de cierto usuario por mensajes de texto para el mes de enero fue de Q 308.00 ¿Cuántos mensajes de texto envió el usuario en ese mes?

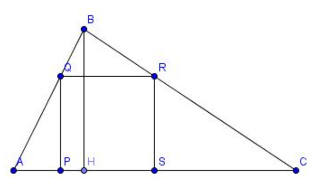
Tema 3 (20 puntos)

Dos círculos son tangentes interiormente (ver figura), la distancia entre los centros es de 8 cm y la suma de sus áreas separadas es de $544\pi cm^2$. Determinar la medida de los radios.



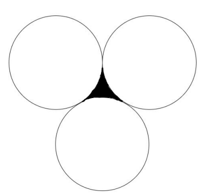
Tema 4 (15 puntos)

Un cuadrado con vértices en P, Q, R, S, está inscrito en el triángulo con vértices ABC, como se muestra en la figura. Si $AC=12cm$, $BH=8cm$.
a. Determinar la mediad del lado del cuadrado.
b.Calcule el área dentro del triángulo con vértices ABC pero fuera del cuadrado.



Tema 5 (20 puntos)

Tres círculos iguales de $12cm$ de radio son tangentes entre sí. Encontrar el área sombreada.



Solución de examen

Tema 1(30 puntos)

Resuelva:

a. $\sqrt{1+8x}+1=\sqrt{9x+4}$

No.	Explicación	Operatoria
1	Para eliminar las raíces de la ecuación, se elevan al cuadrado ambos lados.	$(\sqrt{1+8x}+1)^2=(\sqrt{9x+4})^2$
2	Del lado izquierdo se desarrolla el binomio formado y en el lado derecho, se elimina la raíz.	$(1+8x)+2\sqrt{1+8x}+1=9x+4$
3	Simplificando la ecuación completa, dejando la raíz restante del lado izquierdo.	$2\sqrt{1+8x}=(x+2)$
4	Elevando de nuevo ambos lados de la ecuación al cuadrado, para terminar de eliminar la última raíz y desarrollando el binomio del lado derecho.	$(2\sqrt{1+8x})^2=(x+2)^2$ $4(1+8x)=x^2+4x+4$
5	Simplificando la ecuación.	$4+32x=x^2+4x+4$ $x^2-28x=0$
6	Factorizando para encontrar las dos raíces solución.	$x(x-28)=0$
7	Por el teorema del factor cero, se iguala a cero cada término de la multiplicación obtenida en la ecuación y se despeja, para obtener las dos soluciones.	$x_1=0$ $x_2=28$

b. $3y^{1/6} - 2y^{1/3} - 1 = 0$

No.	Explicación	Operatoria
1	Sustituyendo la variable y.	$u = y^{1/6}$ $u^2 = (y^{1/6})^2 = y^{1/3}$
2	Sustituyendo en la ecuación, ordenandola y multiplicando por -1 en ambos lados.	$3u - 2u^2 - 1 = 0$ $2u^2 - 3u + 1 = 0$
3	Factorizando para resolver la ecuación cuadrática.	$(2u - 1)(u - 1) = 0$
4	Por factor cero, las soluciones para u son.	$u_1 = 1/2$ $u_2 = 1$
4	Regresando a la variable original y resolviendo.	${y_1}^{1/6} = 1/2$ $y_1 = 1/64$ ${y_2}^{1/6} = 1$ $y_2 = 1$

c. $\dfrac{x^2+x-3}{x+1} \leq \dfrac{3x-6}{x+2}$

<table>
<tr><th>No.</th><th>Explicación</th><th>Operatoria</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Manipulando la inecuación.</td><td>$$\frac{x^2+x-3}{x+1} - \frac{3x-6}{x+2} \leq 0$$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Simplificando la expresión, para tener una sola fracción.</td><td>$$\frac{(x^2+x-3)(x+2)-(3x-6)(x+1)}{(x+1)(x+2)} \leq 0$$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Simplificando el numerador y factorizandolo.</td><td>$$\frac{x^3+2x}{(x+1)(x+2)} \leq 0$$
$$\frac{x(x^2+2)}{(x+1)(x+2)} \leq 0$$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Identificando los Ceros Racionales.</td><td>$$x = 0$$
$$x = -1$$
$$x = -2$$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Analizando los ceros, mediante una tabla de intervalos.</td><td>
<table>
<tr><th></th><th>$(-\infty,-2)$</th><th>$(-2,-1)$</th><th>$(-1,0)$</th><th>$(0,\infty)$</th></tr>
<tr><td>x</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>+</td></tr>
<tr><td>x^2+2</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>$x+1$</td><td>-</td><td>-</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>$x+2$</td><td>-</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>$\frac{x(x^2+2)}{(x+1)(x+2)}$</td><td>-</td><td>+</td><td>-</td><td>+</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Ya que la inecuación es menor o igual a cero, solo se toman los intervalos negativos como respuesta.</td><td>$(-\infty-2) \cup (-1,0)$</td></tr>
</table>

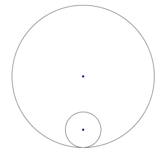
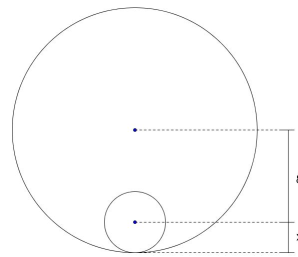
Tema 2(15 puntos)

Una compañía de telefonía celular cobra una cuota mensual de Q 80 por los primeros 1000 mensajes de texto y Q 0.80 por cada mensaje adicional. La cuenta de cierto usuario por mensajes de texto para el mes de enero fue de Q 308.00 ¿Cuántos mensajes de texto envió el usuario en ese mes?

No.	Explicación	Operatoria
1	Estableciendo la variable x como la cantidad de mensajes extra, se sabe que el total de mensajes M_T será igual a la suma de los primeros mil y los mensajes extra.	$M_T = 1000 + x$
2	Planteando en función del dinero, se sabe que la suma de la cuota mensual de Q 80, correspondiente a los primeros mil mensajes, y la cuota extra que resulta de multiplicar la cantidad de mensajes extra y el precio de estos que es Q 0.80, se obtiene el total de enero que es Q 308.00.	$80 + 0{,}8x = 308$
3	Despejando la ecuación anterior, el valor de x es 285.	$0{,}8x = 228$ $x = 285$
4	Por lo tanto, sustituyendo x en M_T, el total de mensajes es 1285.	$M_T = 1000 + 285 = 1285$

Tema 3 (20 puntos)

Dos círculos son tangentes interiormente (ver figura), la distancia entre los centros es de 8 cm y la suma de sus áreas separadas es de $544\pi cm^2$. Determinar la medida de los radios.

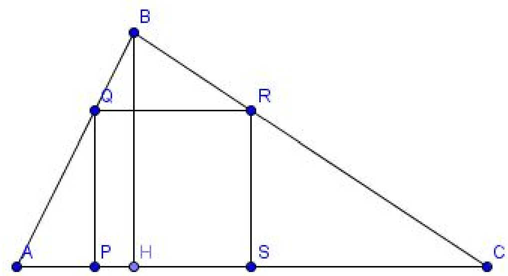
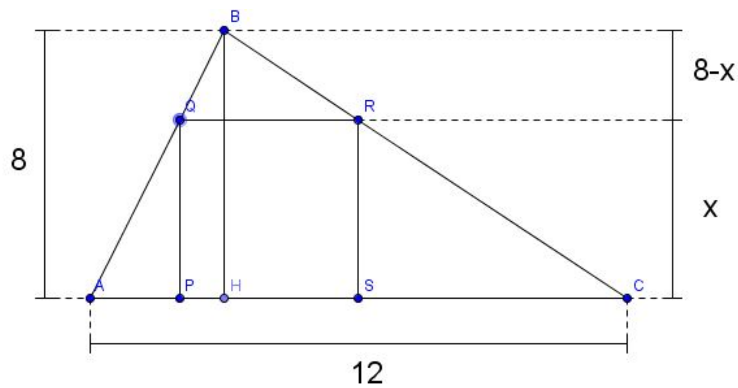
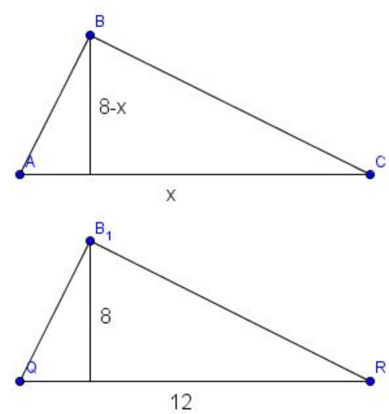
No.	Explicación	Operatoria
1	Figura del problema.	
2	Estableciendo las medidas de la figura, donde 8 es la medida entre radios y x es el radio del círculo interno.	
3	Por lo tanto, el radio mayor es la suma del radio del círculo interno y la distancia entre radios.	$R = 8 + x$ $r = x$
4	Debido a que se tiene el dato de la suma de sus áreas separadas, se plantea una ecuación de área, con la suma separada de cada círculo.	$A_T = \pi r^2 + \pi R^2$
5	Sustituyendo los datos dados y planteados.	$544\pi = \pi(x^2 + (8 + x)^2)$
6	Simplificando la ecuación y armando una ecuación cuadrática.	$544 = 2x^2 + 16x + 64$ $x^2 + 8x - 240 = 0$
7	Factorizando la ecuación, se obtienen dos soluciones.	$(x + 20)(x - 12) = 0$
8	Las dos soluciones a la ecuación son -20 y 12. Debido a la interpretación física del problema, la solción es 12cm, para el radio del círculo interno.	$x = -20$ $r = x = 12$
9	Ya que el problema pide ambos radios, se utiliza la ecuación de R, para encontrar el radio mayor.	$R = 8 + 12 = 20$

Tema 4 (15 puntos)

Un cuadrado con vértices en P, Q, R, S, está inscrito en el triángulo con vértices ABC, como se muestra en la figura. Si $AC = 12cm$, $BH = 8cm$.

a. Determinar la mediad del lado del cuadrado.

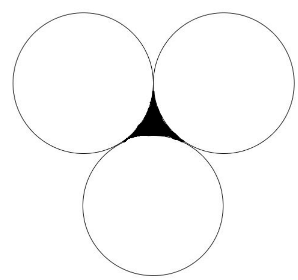
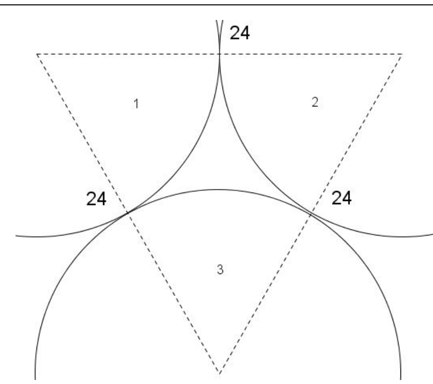
b.Calcule el área dentro del triángulo con vértices ABC pero fuera del cuadrado.

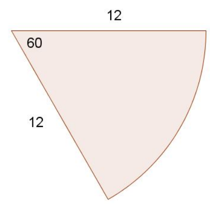
No.	Explicación	Operatoria
1	Figura del problema.	
2	La medida del lado del cuadrado se establece como x y las dimensiones de la figura se muestran a continuación.	
3	Relacionando los triángulos ABC y QBR por semejanza, para encontrar el lado del cuadrado x.	

No.	Explicación	Operatoria
4	La semejanza se establece con las alturas y bases de los triángulos.	$$\frac{8-x}{8}=\frac{x}{12}$$
5	Despejando la variable x.	$$96-12x=8x$$ $$20x=96$$ $$x=24/5cm$$
6	El área dentro del triángulo y fuera del cuadrado, se calcula restando ambas áreas.	$$A=A_{TR}-A_C$$ $$A=\frac{1}{2}bh-l^2$$
7	Donde $b=12cm$, $h=8cm$ y $l=x=24/5cm$.	$$A=\frac{1}{2}(12)(8)-\left(\frac{24}{5}\right)^2=24{,}96cm^2$$

Tema 5 (20 puntos)

Tres círculos iguales de $12cm$ de radio son tangentes entre sí. Encontrar el área sombreada.

No.	Explicación	Operatoria
1	Figura del problema.	
2	Uniendo los radios entre sí, se obtiene la siguiente figura, donde se observa un triángulo equilátero de lado $24cm$, que posee tres sectores circulares.	

No.	Explicación	Operatoria
3	Cada sector circular posee un radio de $12cm$ y un ángulo de $\theta = 60^o$.	
4	Calculando el área de un sector circular.	$A_{sc} = \frac{\theta}{360^o}(\pi r^2) = \frac{60}{360^o}(\pi(12)^2) = 24\pi cm^2$
5	Por simetría, se multiplica por tres el área anterior.	$A_{scT} = 3A_{sc} = 3(24\pi) = 72\pi cm^2$
6	Para el área sombreada, debe conocerse el área del triángulo que encierra los tres sectores circulares. Ya que es un triángulo equilatero, se utiliza la fórmula de altura $h = \frac{\sqrt{3}}{2}b$, con un $b = 24cm$. Y para el área, se aplica la fórmula del triángulo $A_{TR} = 2\left(\frac{bh}{2}\right)$.	$h = \frac{\sqrt{3}}{2}(24) = 12\sqrt{3}$ $A_{TR} = 2\left(\frac{(12)(12\sqrt{3})}{2}\right) = 144\sqrt{3}cm^2$
7	Por lo tanto, el área sombreada es la resta de A_{TR} y A_{scT}.	$A_s = A_{TR} - A_{scT} = 144\sqrt{3} - 72\pi = 23{,}22cm^2$