UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-101-2-V-1-00-2018

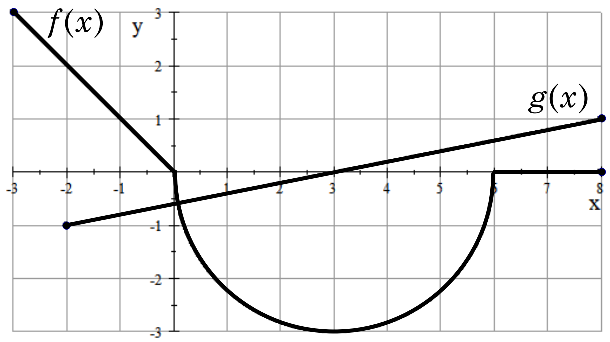
CURSO:	**Matemática Básica 1**
SEMESTRE:	**Primero**
CÓDIGO DEL CURSO:	**101**
TIPO DE EXAMEN:	**Segundo Parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**13 de marzo de 2018**
REVISÓ EL EXAMEN:	**Ing. Erick Agustín**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Darwin Santos**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Darwin Santos**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

Universidad de San Carlos de Guatemala — **Departamento de Matemática**
Facultad de Ingeniería — **Matemática Básica 1**

Segundo examen parcial

Temario V2

Tema 1: (25 puntos)



La figura muestra las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$

a. Obtenga el dominio y el rango de $f(x)$.

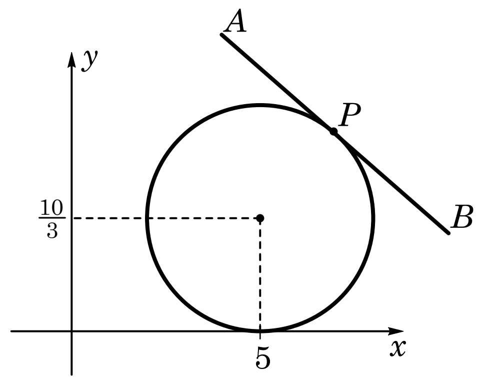
b. Construya una fórmula para $f(x)$.

c. Calcule $g(3)+f(-2)$

d. Calcule $(f\circ g)(-2)$

e. Grafique $-f(x-2)$

Tema 2: (20 puntos)



En la siguiente figura la recta $\overline{AB}$es tangente a la circunferencia en el punto P de coordenadas $(7,6)$, determine:

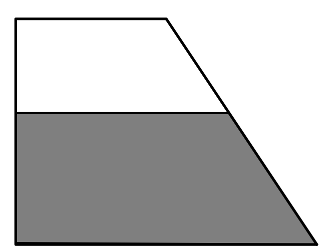
a.La ecuación general de la recta,

b.La ecuación general de la circunferencia.

Tema 3: (15 puntos)

El apotema de un hexágono regular mide $\sqrt{5}$ cm. Si dicho hexágono se inscribe en una circunferencia. ¿Cuánto vale el área que se encuentra fuera del hexágono y dentro de la circunferencia?

Tema 4: (20 puntos)



Un abrevadero tiene la forma de un prisma de 12 pies de largo. Su sección transversal, que se muestra en la figura, es un trapecio con un lado perpendicular a las bases, de base mayor 6 pies, base menor 3 pies y 4 pies de altura.

a. Determine la capacidad del abrevadero,

c. ¿Cuál es el volumen dentro del abrevadero cuando la altura del nivel del agua es 5/2 pie?

d. Calcule la altura para que el área del espejo de agua sea de 40 pies cuadrados

Tema 5: (20 puntos)

Dada la función $f(x)=\sqrt{x+4}-2$

a. Encuentre el dominio y el rango, indique si la función es uno a uno.

b. Si la función es uno a uno encuentre su función inversa, indicando su dominio y rango.

c. Dibuje en un mismo sistema de coordenadas la gráfica de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$

d. Calcule $f\left(f^{-1}(x)\right)$

Universidad de San Carlos de Guatemala **Departamento de Matemática**
Facultad de Ingeniería **Matemática Básica 1**

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema 1: (25 puntos)

La figura muestra las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$

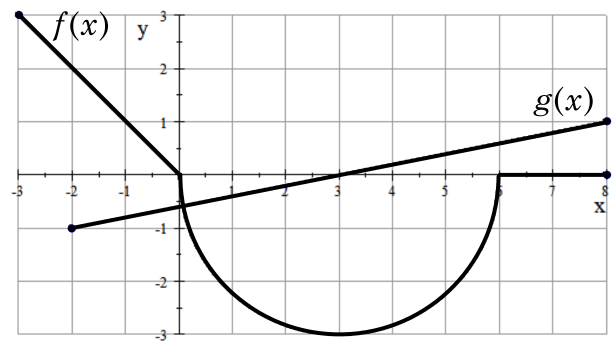
a. Obtenga el dominio y el rango de $f(x)$.

b. Construya una fórmula para $f(x)$.

c. Calcule $g(3)+f(-2)$

d. Calcule $(f\circ g)(-2)$

e. Grafique $-f(x-2)$



INCISO A

No.	Explicación	Operatoria
1.	Primero se observa que para la función f(x) se tienen 3 graficas que la componen, se analizará cada una de ellas.	DOMINIO [-3,0] Gráfica de recta negativa DOMINIO [0, 6] Gráfica de media circunferencia DOMINIO [6,8] Gráfica de recta
2.	Para el primer inciso nos pide el dominio de toda la función, entonces se hace una sola unión de las 3 gráficas y se da el dominio de toda la gráfica. Como está restringida entonces se coloca corchetes. Para el caso del rango se analiza la gráfica en el eje Y, como está restringida se coloca corchete.	DOMINIO [-3,8] RANGO [-3, 3]

R./ DOMINIO [-3,8] RANGO [-3, 3]

INCISCO B

No.	**Explicación**	**Operatoria**
1.	Para el primer tramo tenemos una recta negativa, conocemos los puntos para encontrar su pendiente P1=(-3,3) P2=(0,0), con esto se puede aplicar la ecuación de la recta pendiente y con ello lo aplicación en la ecuación general de la recta.	$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(0-3)}{(0-(-3))}=\frac{-3}{3}=-1$ $(y-y1)=m(x-x1)$ $y-(0)=(-1)(x-(0))$ $y=-x \qquad x\in[-3,0)$
2.	Para el segundo tramo, se tiene una circunferencia a la mitad con un radio de 3 unidades, y su centro también ubicado a 3 unidades del origen, a partir de estos datos podemos construir la ecuación	C(3,0) ; r=3 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ $[x-(3)]^2+[y-(0)]^2=(3)^2$ $(x-3)^2+y^2=9$ $y^2=9-(x-3)^2$ $y^2=9-x^2+6x-9$ $y^2=-x^2+6x$ $y=-\sqrt{-x^2+6x} \quad x\in[0,6)$
3.	Para el tercer tramo, se tiene Una recta con inicio en las coordenadas (6,0) y terminación en (8,0). Recta horizontal	$x=0$ $x\in[6,8]$
4.	Ya que se tienen definidos los tramos, se procede a construir la función por partes de la gráfica dada.	$f(x)=\begin{cases}-x & x\in[-3,0)\\ -\sqrt{-x^2+6x} & x\in[0,6)\\ 0 & x\in[6,8]\end{cases}$

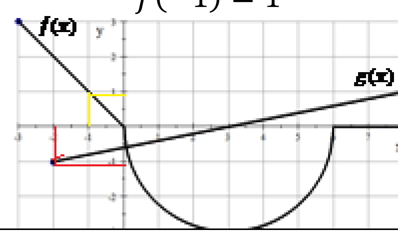
$$f(x)=\begin{cases}-x & x\in[-3,0)\\ -\sqrt{-x^2+6x} & x\in[0,6)\\ 0 & x\in[6,8]\end{cases}$$

INCISO C

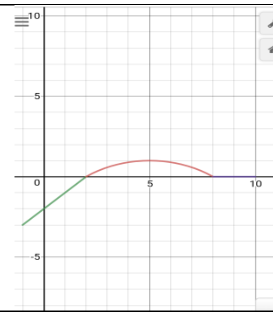
No.	Explicación	Operación
1	Para g(3) lo ubicamos en la gráfica en donde se intersecta en la coordenada (3,0) y en la gráfica f(-3) será ubicada en la coordenada (0,-3)	$g(3)+f(-2)$ $=(0)+[-(-2)]$ $=2$

$$\boxed{g(3)+f(-2)=2}$$

INCISO D

No.	**Explicación**	**Operatoria**
1	Para el cálculo de (FoG)(-2) se empieza de la función g(-2), que se logra observar en la grafica, se une la intersección de -2 y este sería -1 y luego se encuentra el valor de f con el resultado obtenido de g(-2)	$f\big(g(-2)\big)$ $g(-2)=-1$ $f(-1)=1$ 

INCISO E

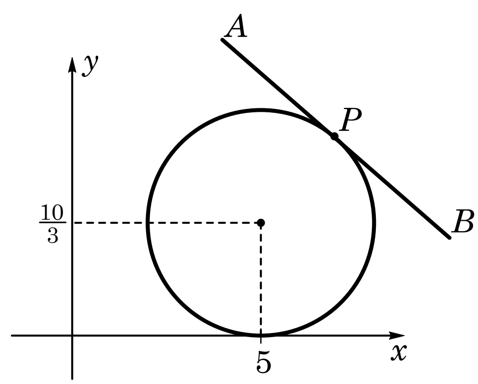
No	EXPLICACION	OPERATORIA
1	Lo primero que se debe de hacer es reflejar la gráfica por el signo menos que aparece en el enunciado, y luego se corre dos unidades hacía la derecha(esto se realiza cuando aparece un signo -, cuando aparece un signo + se corre hacia la izquierda)	

Tema 2: (20 puntos)

En la siguiente figura la recta $\overline{AB}$ es tangente a la circunferencia en el punto P de coordenadas $(7, 6)$, determine:

a.La ecuación general de la recta,

b.La ecuación general de la circunferencia.



INCISO A

No	EXPLICACION	OPERATORIA
1	Lo primero que se debe hacer es encontrar la pendiente entre los puntos $\overline{AB}$ ya que se tiene coordenadas del punto P y se tiene coordenadas del círculo de su intersección en el centro.	$P(7,6)\ C(5,\frac{10}{3})$ $m=\frac{Y_2-Y_1}{X_2-X_1}$ $m(PC)=\frac{6-\frac{10}{3}}{7-5}$
2	Encontrando el valor de la pendiente de PC se encuentra la pendiente AB de la siguiente forma:	$m(PC)=\frac{4}{3}$ $m(AB)=-\frac{1}{4/3}$ $m=-\frac{3}{4}$

3	Con la pendiente encontrada en el inciso anterior se aplica en la ecuación general de la recta.	$(Y - Y_p) = m(X - X_p)$ $(Y - 6) = -\frac{3}{4}(X\text{-}7)$ $y - 6 = -\frac{3}{4}x + \frac{21}{4}$
4	Se multiplica toda la ecuación por 4 y se simplifica la ecuación hasta llegar a a la forma general.	$4y + 3x - 45 = 0$

$$\boxed{4y + 3x - 45 = 0}$$

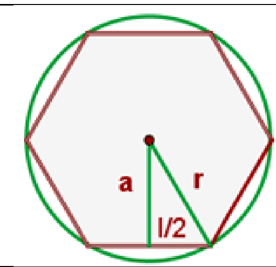
INCISO B

No	**EXPLICACION**	**OPERATORIA**
1	Para encontrar la ecuación general de una circunferencia tenemos el radio que es la distancia del origen al centro en el eje Y, y se tienen coordenadas para aplicarlas en la ecuación general.	Centro $\left(5, \frac{10}{3}\right)$ $Radio = \frac{10}{3}$ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2$ $(x - 5)^2 + \left(y - \frac{10}{3}\right)^2 = \left(\frac{10}{3}\right)^2$
2	Ya con los datos de la ecuación general se procede a desarrollar y simplificar para que de cómo resultado la ecuación general de la circunferencia.	$x^2 - 10x + 25 + y^2 - \frac{20}{3}y + \frac{100}{9} = \frac{100}{9}$
3	Operando y simplificando queda de la siguiente manera la ecuación.	$x^2 + y^2 - 10x - \frac{20}{3}y + 25 = 0$

$$\boxed{x^2 + y^2 - 10x - \frac{20}{3}y + 25 = 0}$$

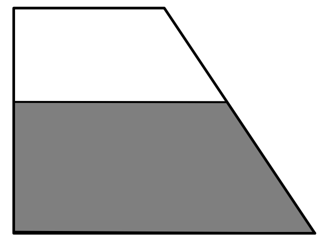
Tema 3: (15 puntos)

El apotema de un hexágono regular mide $\sqrt{5}$ cm. Si dicho hexágono se inscribe en una circunferencia. ¿Cuánto vale el área que se encuentra fuera del hexágono y dentro de la circunferencia?

No	**EXPLICACION**	**OPERATORIA**
1	En este problema se conoce la apotema del hexagono para lo cúal se va tomar	
2	Como se observa en la figura teniendo la apotema se puede encontrar el radio del circulo a través de una relación de ángulo y apotema, por medio de un triangulo rectángulo, por el método de Pitágoras se encontrar el lado b=l/2. (Se divide dentro de 12 el ángulo ya que se forman 12 triángulos rectángulos en el hexágono).	$\mathrm{a} = \sqrt{5}$ $\theta = \frac{360°}{12}$ $\theta = 30°$ $Cos\theta = \frac{a}{r}$ $r = \frac{\sqrt{5}}{cos30°}$ $r = 2.58$
3.	Con el valor del radio se puede encontrar b=l/2 a través de Pitágoras.	$r^2 = a^2 + b^2$ $b = \sqrt{(2.58)^2 - (\sqrt{5})^2}$ $b = 1.29$
4.	Con los datos obtenidos se puede encontrar el área del hexágono y el área del círculo, para finalmente encontrar el área sombreada.	$A_{Circulo=}\pi r^2$ $A_{Circulo=}\pi(2.58)^2$ $\boldsymbol{A_{Circulo=}\frac{20}{3}\pi\ cm^2}$ $A_{Hexagono} = 6 * b * a$ $A_{Hexagono} = 6 * 1.29 * 2.58$ $\boldsymbol{A_{Hexagono} = 17.32\ cm^2}$
5	Se resta el área del círculo con el área del hexágono y se obtiene el área sombreada.	$A_C - A_H = \frac{20}{3}\pi\ cm^2 - 17.32\ cm^2$ $\boldsymbol{A_{Sombreada} = 3.62\ cm^2}$

$$\boxed{\boldsymbol{A_{Sombreada} = 3.62\ cm^2}}$$

Tema 4: (20 puntos)



Un abrevadero tiene la forma de un prisma de 12 pies de largo. Su sección transversal, que se muestra en la figura, es un trapecio con un lado perpendicular a las bases, de base mayor 6 pies, base menor 3 pies y 4 pies de altura.

a. Determine la capacidad del abrevadero,

b. ¿Cuál es el volumen dentro del abrevadero cuando la altura del nivel del agua es 5/2 pie?

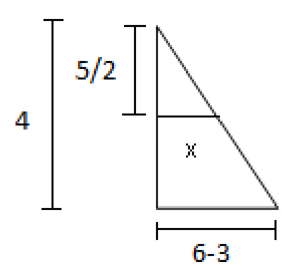
c. Calcule la altura para que el área del espejo de agua sea de 40 pies cuadrados

INCISO A

No.	Explicación	Operatoria
1	Para determinar la capacidad, se debe encontrar el área de la figura dada y luego se multiplica por el largo para encontrar la capacidad del abrevadero.	$Area = \frac{(B+b)}{2} * h$ $Area = \frac{(6+3)}{2} * 4$ $Area = 18\ ft^2$ $Area * l = 18 * 12$ $Capacidad = 216\ ft^3$

$$\boxed{Capacidad = 216\ ft^3}$$

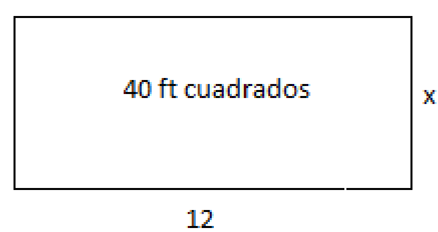
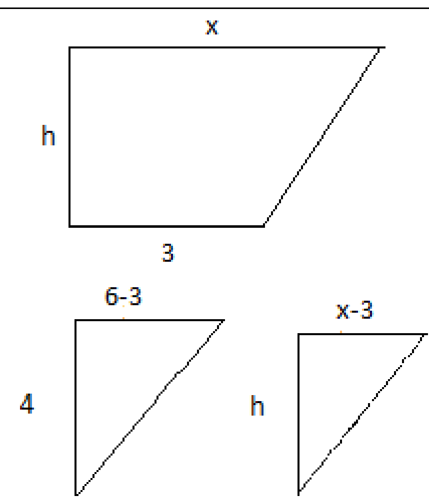
INCISO B

No.	Explicación	Operatoria
1	Lo primero que se debe de hacer para este inciso es una relación de triángulos ya que sabemos que la altura es de 4pies, lo que se pide en este inciso es encontrar el volumen cuando está a una altura de 5/2 ft. Con la relación de triángulos se encontrará el valor de x	

2	A continuación se encontrará el valor de x	$\frac{3}{4} = \frac{2x}{5}$ $x = \frac{15}{8}$
3	Con el valor de x encontrado se encontrará el valor de b de la siguiente manera	$b = 3 + \frac{15}{8}$
4	Ahora con el valor encontrado de b se encontrará el área cuando la altura es de 5/2 ft	$Area = \frac{{}^{39}/_{8} + 3}{2} * \left(\frac{5}{2}\right)$ $Area\ aprox = 9.84\ ft^2$
5	Con el área encontrada se calcula finalmente el volumen solicitado	$Volumen = (9.84) * (12)$ $Volumen = 118\ ft^3$

$$\boxed{Volumen = 118\ ft^3}$$

INCISO C

No.	**Explicación**	**Operatoria**
1	Se tiene un área de $40ft^2$ y nos solicitan a qué altura estará cuando tenga está área, entonces se va dividir en figuras conocidas.	
2	Se hará una relación de triangulos para encontrar el valor de x	

3	Como se observa en las figuras con la relación de triangulos se pueden encontrar los valores de x y h de la siguiente manera:	$\frac{x-3}{3}=\frac{h}{4}$ $x=\frac{3}{4}h+3$
4	Ya que se tiene el área total, se sustituyen valores	$40=(12)(x)$ $40=(12)(\frac{3}{4}h+3)$
5	Se despeja h y se encuentra el valor	$40=9h+36$ $h=\frac{4}{9}ft$

$$\boxed{h=0.44ft}$$

Tema 5: (20 puntos)

Dada la función $f(x)=\sqrt{x+4}-2$

a. Encuentre el dominio y el rango, indique si la función es uno a uno.

b. Si la función es uno a uno encuentre su función inversa, indicando su dominio y rango.

c. Dibuje en un mismo sistema de coordenadas la gráfica de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$

d. Calcule $f\left(f^{-1}(x)\right)$

INCISO A

No.	**Explicación**	**Operatoria**
1	Para encontrar el dominio de la función se evalúan valores en los cuales la función sea positiva para no tener valores negativos por la raíz.	$x+4\geq 0$ $x\geq -4$ $x\in[-4,\infty)$
2	Para encontrar el rango de la función se encuentra el vértice en el eje y, de la siguiente manera.	$y=\sqrt{x+4}-2$ $y+2=\sqrt{x+4}$

3	Como sabemos que x tiende a menos 4	$(y+2)^2=(\sqrt{x+4})^2$
4	Operando queda de la siguiente forma	$(y+2)^2 \geq 0$ $Vertice\ en\ y=-2$ $f(x)\in[-2,\infty)$ $La\ función\ es\ \ uno\ a\ uno$

$x\in[-4,\infty)\ \ dominio$

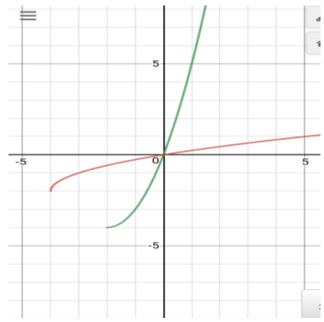
$f(x)\in[-2,\infty)\ \ \ rango$
$La\ función\ es\ \ uno\ a\ uno$

INCISO B

No.	**Explicación**	**Operatoria**
1	Para este inciso la función f se tomará como una variable y, se despejará para x y será nuestra función inversa ya que es uno a uno	$y=\sqrt{x+4}-2$ $y-2=\sqrt{x+4}$ $(y-2)^2=x+4$ $(y-2)^2-4=x$ $f^{-1}(x)=y=(x-2)^2-4$
2	Para encontrar el dominio y rango se trabaja de la misma manera que en el inciso a, y da como resultado:	$Dominio\ [-2,\infty)$ $Rango\ [-4,\infty)$

$$f^{-1}(x)=y=(x-2)^2-4$$
$$Dominio\ [-2,\infty)$$
$$Rango\ [-4,\infty)$$

INCISO C

No.	Explicación	Operatoria
1	Para graficar la función se puede construir una tabla de valores, y se gráfica en un mismo sistema de coordenadas	

INCISO D

No.	Explicación	Operatoria
1	Para este inciso de debe encontrar la función reciproca de la función inversa encontrada en el inciso b.	$f(f^{-1}) = f((x+2)^2 - 4)$ $\sqrt{[(x+2)^2 - 4] + 4} - 2$ $\sqrt{(x+2)^2} - 2$ $x + 2 - 2$ $f(f^{-1}) = x$

$$\boxed{f(f^{-1}) = x}$$