UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-101-3-M-1-00-2015

CURSO:	**Matemática Básica 1**
SEMESTRE:	**Primero**
CÓDIGO DEL CURSO:	**101**
TIPO DE EXAMEN:	**Tercer Examen Parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**30 de abril de 2015**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Inga. Silvia Hurtarte**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Germán Antonio Oliva Muralles** **Moris Uxlab Pineda Cardona** **Jorge Mario Gutiérrez Ovando** **Haroldo José López de los Ríos**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

30 de abril de 2015 Tercer Examen Parcial Temario WW

Tema 1: 30 puntos.
Resolver las ecuaciones que se plantean a continuación:

a) $4^{x-1} + 3 * 4^{x+1} = 196$

b) $(\log_3 x)^2 - 6\log_9 x + 2 = 0$

Verifique la identidad trigonométrica dada:

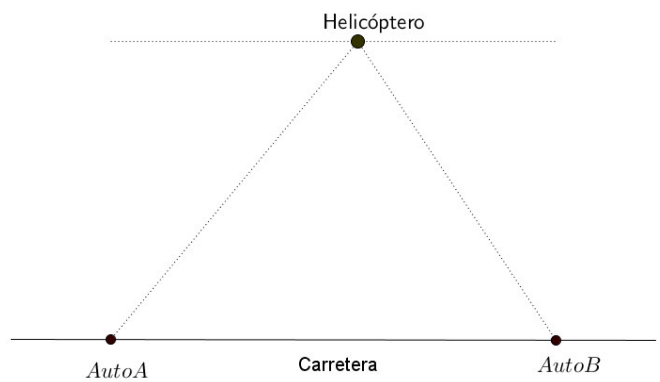
c) $\dfrac{\cot y - \tan y}{\operatorname{sen} y \ \cos y} = \csc^2 y - \sec^2 y$

Tema 2: 20 puntos.
Dada la función $y = -3\cos(6x + \pi) - 2$,

a) Determine la amplitud, período y desplazamiento de fase.
b) Construya la representación gráfica de la función.

Tema 3: 20 puntos.
Dos autos **A** y **B** que se encuentran a 5 millas de distancia entre sí, se encuentran estacionados en el borde de una carretera recta. En ese instante un helicóptero que está volando sobre la carretera observa los dos autos con ángulos de depresión de 32° y 48° respectivamente, como se muestra en la figura.
Determine:

a) La distancia del helicóptero al punto A.
b) La altitud a la que vuela el helicóptero



Tema 4: 15puntos.
La población de una comunidad crece de acuerdo con un modelo exponencial. Los datos estadísticos aportan evidencia de que la población se duplicó en 5 años.

a) Construya una función que modele el crecimiento poblacional.
b) Determine en cuánto tiempo se triplicará la población.

Tema 5: 15 puntos.
Dada la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$ si $x \leq 2$
Determinar:

a) La función inversa de $f(x)$
b) Dominio y rango de $f^{-1}(x)$
c) Trace $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ en el mismo plano de coordenadas cartesianas

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema 1: 30 puntos

a) $4^{x-1} + 3 * 4^{x+1} = 196$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Primero se busca definir toda la expresión en un solo término a manipular. En este caso el término será 4^x.	$\frac{4^x}{4} + 3 * 4 * 4^x = 196$
2.	Para facilidad de operación se convertirán todos los coeficientes en enteros, eliminando las divisiones. En este caso multiplicamos ambos lados de la igualdad por 4.	$4^x + 48 * 4^x = 784$
3.	Dado que existen dos términos con parte variable 4^xdel lado izquierdo de la ecuación se utiliza el término 4^x como una sola variable y se reduce la expresión sumando.	$49 * 4^x = 784$
4.	Se despeja para el término 4^x dividiendo en ambos lados de la igualdad por 49 y se reduce.	$4^x = 16$
5.	Dado que la variable a despejar es un exponente en una expresión se aplica logaritmo con una base adecuada de ambos lados de la expresión.	$\log_4(4^x) = \log_4(16)$
6.	En el lado derecho de la ecuación expresamos 16 dentro del logaritmo en términos que sea fácil de operar.	$\log_4(4^x) = \log_4(4^2)$
7.	Por propiedades de logaritmos extraemos los exponentes y en ambos lados se reduce a $\log_4(4)$, lo cual se reduce a 1, quedando tan solo los términos que inicialmente eran exponentes dentro de la expresión.	$x = 2$

R./ x = 2

b) $(\log_3 x)^2 - 6\log_9 x + 2 = 0$

No.	**Explicación**	**Operatoria**
1.	Existen dos alternativas para encontrar la solución a esta ecuación debido al logaritmo. Estas son optar operando con logaritmo base 3 o con base 9. En esta solución se trabajará con base 3 y se inicia definiendo la conversión de base 9 a base 3.	$\log_9(x) = \frac{\log_3(x)}{\log_3(9)} = \frac{\log_3(x)}{\log_3(3^2)} = \frac{\log_3(x)}{2}$
2.	Se aplica la conversión definida en la ecuación a resolver.	$(\log_3 x)^2 - 6 * [\frac{\log_3 x}{2}] + 2 = 0$
3.	Se simplifica la expresión.	$(\log_3 x)^2 - 3 * \log_3 x + 2 = 0$
4.	Se maneja la expresión $\log_3 x$ como un solo término U, para facilitar la operatoria.	$U = \log_3 x$ $U^2 - 3U + 2 = 0$
5.	Se resuelve la ecuación cuadrática para la variable U.	$(U-2)(U-1) = 0$ $U_1 = 2$ $U_2 = 1$
6.	Se aplican las soluciones obtenidas a la expresión con la variable original y se despeja para la variable original aplicando la relación entre algoritmo y exponenciación.	$U = \log_3 x$ $x = 3^U$ $x_1 = 3^{U_1} = 3^2 = 9$ $x_2 = 3^{U_2} = 3^1 = 3$

R./

$$x_1 = 9\ ,\quad x_2 = 3$$

c) Verificar la entidad trigonométrica dada.

$$\frac{\cot y - \tan y}{\operatorname{sen} y \ \cos y} = \csc^2 y - \sec^2 y$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Para realizar una demostración se trabaja con un lado de la expresión buscando llegar a la otra expresión. En este caso se trabajará con el lado derecho de la expresión. Se inicia definiendo el mismo denominador del lado izquierdo.	$\csc^2 y - \sec^2 y$ $\frac{\csc^2 y * \sin y \cos y - \sec^2 y * \sin y \cos y}{\sin y \cos y}$
2.	Se definen las funciones cosecante y secante en términos de las funciones seno y coseno.	$\frac{(\frac{1}{\sin y})^2 * \sin y \cos y - (\frac{1}{\cos y})^2 * \sin y \cos y}{\sin y \cos y}$
3.	Se simplifica la expresión reduciendo los términos semejantes.	$\frac{\frac{\cos y}{\sin y} - \frac{\sin y}{\cos y}}{\sin y \cos y}$
4.	Se sustituye los términos en el numerador por las funciones trigonométricas tangente y cotangente.	$\frac{\cot y - \tan y}{\sin y \cos y}$
5.	Se compara con la expresión original concluyendo la demostración	$\frac{\cot y - \tan y}{\sin y \cos y} = \frac{\cot y - \tan y}{\sin y \cos y}$

Universidad de San Carlos de Guatemala **Departamento de Matemática**
Facultad de Ingeniería **Matemática Básica 1**

Solución alternativa.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se trabajará con el lado izquierdo de la expresión.	$\frac{\cot y - \tan y}{\sin y \cos y}$
2.	Se sustituye las funciones cotangente y tangente en términos de las funciones seno y coseno.	$\frac{\frac{\cos y}{\sin y} - \frac{\sin y}{\cos y}}{\sin y \cos y}$
3.	Se define el numerador en un solo término.	$\frac{\frac{\cos^2 y - \sin^2 y}{\sin y \cos y}}{\sin y \cos y}$
4.	Se opera por la ley de extremos y medios. Observar que el denominador del denominador es 1.	$\frac{\cos^2 y - \sin^2 y}{\sin^2 y \cos^2 y}$
5.	Se descompone en dos términos.	$\frac{\cos^2 y}{\sin^2 y \cos^2 y} - \frac{\sin^2 y}{\sin^2 y \cos^2 y}$
6.	Se reduce la expresión eliminando dividiendo término a término.	$\frac{1}{\sin^2 y} - \frac{1}{\cos^2 y}$
7.	Se sustituye las expresiones en función de seno y coseno para que quede en función de las funciones cosecante y secante.	$\csc^2 y - \sec^2 y$

8.	Se iguala con el lado derecho para comprobar la identidad.	$\csc^2 y - \sec^2 y = \csc^2 y - \sec^2 y$

R./ Dado que se logró llegar a la expresión del lado izquierdo a partir del lado derecho, queda demostrado que la identidad definida es válida.

Respuesta Alternativa

R./Dado que se logró llegar a la expresión del lado derecho a partir del lado izquierdo, queda demostrado que la identidad definida es válida.

Tema 2: 20 puntos.

Dada la función $y = -3\cos\left(6x + \pi\right) - 2$,

a) Determine la amplitud, período y desplazamiento de fase.

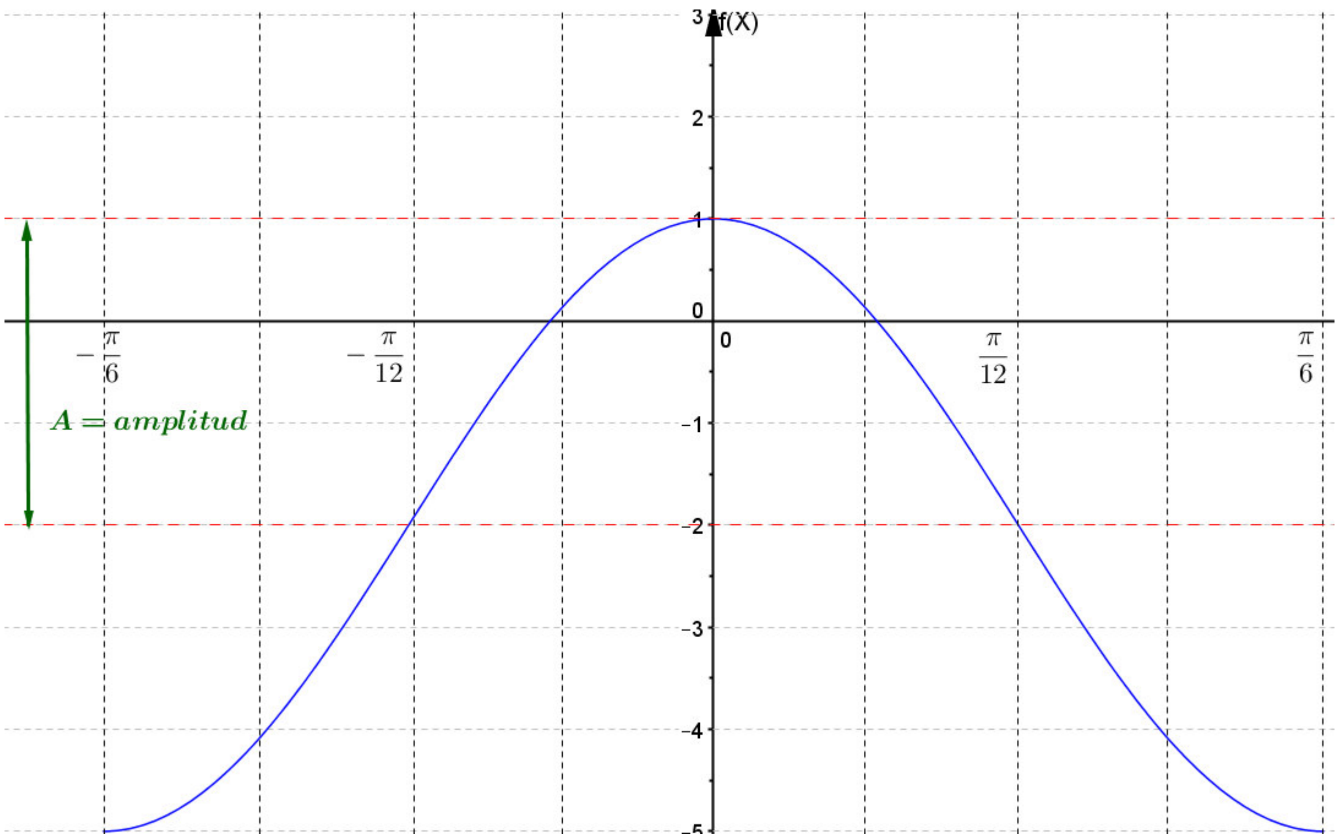
No	**EXPLICACION**	**OPERATORIA**
1	Se determinan función	$\boxed{\lvert a\rvert = \lVert -3\rVert = 3}$
2	Escribir la forma general de la función	$y = a\cos b(x + c) - d$
3	Se procede a factorizar la función	$y = -3\cos(6x + \pi) - 2$ $y = -3\cos 6\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 2$
4	El periodo se define como: Substituyendo valores es obtiene	$P = \frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$ donde $\lvert b\rvert = 6$
5	Se determina el periodo de la función	$\boxed{P = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}}$
6	Se determina el desfase de la función $y = -3\cos 6\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 2$	$\boxed{\text{Desfase} = -\frac{\pi}{6}}$ Se puede expresar tambien como: $\frac{\pi}{6}$ a la izquierda

b) Construya la representación gráfica de la función.

$$y = -3\cos 6\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 2$$

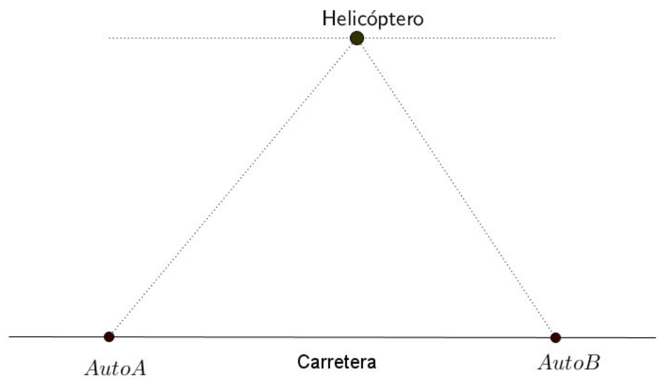
De la función dada se puede determinar que existe un reflejo en el eje x así como también un desplazamiento vertical en $y = -2$

Se procede a graficar la función



Tema 3: 20 puntos

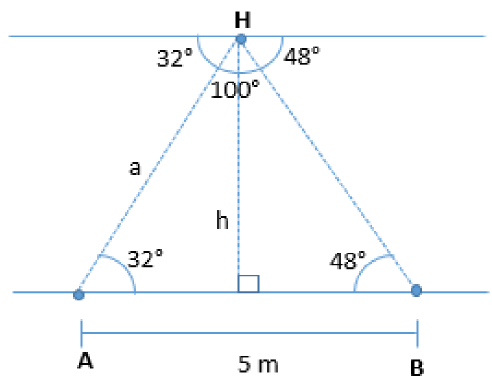
Dos autos **A** y **B** que se encuentran a 5 millas de distancia entre sí, se encuentran estacionados en el borde de una carretera recta. En ese instante un helicóptero que está volando sobre la carretera observa los dos autos con ángulos de depresión de 32^o y 48^o respectivamente, como se muestra en la figura.



Determine:

- **a)** La distancia del helicóptero al punto A.
- **b)** La altitud a la que vuela el helicóptero.

Utilizando ángulos complementarios.



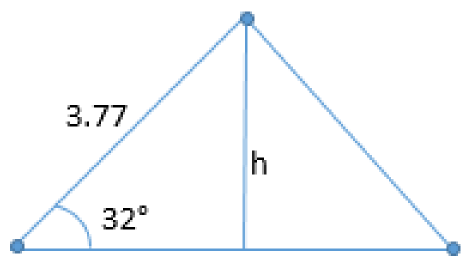
a). Distancia del helicóptero al auto A.

No.	Explicación	Operación
1	Identificación de variables	$a =$ distancia entre el auto A y el helicoptero H $d =$ distancia entre el vehiculo A y el vehiculo B en mts $\alpha =$ angulo de depresion entre el punto H y el puntoA $\beta =$ angulo suplementario
2	Utilizando la ley de Senos	$\frac{\mathrm{Sen}(\beta)}{d} = \frac{\mathrm{Sen}(\alpha)}{a}$
3	Despejando el la incógnita a	$a = \frac{d * \mathrm{Sen}(\alpha)}{\mathrm{Sen}(\beta)}$

4	Sustituyendo datos	$a = \frac{5\ m * Sen(48°)}{Sen(100°)}$ $a = 3.77\ m$

La variable a representa la distancia que existe entre el helicóptero H y el auto A, siendo el valor de esta distancia de 3.77 metros.

b). La altitud del helicóptero.



No.	Explicación	Operación
1	Identificación de variables	$a =$ distancia entre el helicoptero y el auto A $h =$ altura del helicoptero
2	Utilizando funciones trigonométricas	$Sen(\theta) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{h}$
3	Despejando la incógnita h	$h = a * Sen(\theta)$
4	Sustituyendo valores	$\theta = 32°$ $a = 3.77$ $h = ?$
5	Encontrado el valor de h	$h = 3.77 * Sen(32°)$ $h = 2\ m$

La variable h representa la altitud a la que se encuentra el helicóptero, siendo el valor de esta altura de 2 metros.

Tema 4: 15 puntos.

La población de una comunidad crece de acuerdo con un modelo exponencial. Los datos estadísticos aportan evidencia de que la población se duplicó en 5 años.

- **c)** Construya una función que modele el crecimiento poblacional.
- **d)** Determine en cuánto tiempo se triplicará la población.

No.	**Explicación**	**Operatoria**
1	Este problema es un problema de crecimiento exponencial. Identificación de los datos mediante una tabla de valores. **t** representa el tiempo **N(t)** representa la población de la comunidad **No** representa la población inicial	<table><tr><td>t</td><td>0</td><td>2</td><td>t=?</td></tr><tr><td>N(t)</td><td>No</td><td>2No</td><td>3No</td></tr></table> $N(t) = No\, e^{rt}$
2	Aplicando la condición inicial $N(5) = 2No$ En este caso t=5 y N= 2No	$2No = No\, e^{r5}$
3	Se cancela No y se obtiene una ecuación para aplicar logaritmo.	$2\cancel{No} = \cancel{No}\, e^{5r}$
4	Aplicando Logaritmo natural a ambos lados de la ecuación	$\ln 2 = \ln\, e^{5r}$
5	Utilizando las propiedades, bajamos el exponente 5r como coeficiente del logaritmo	$\ln 2 = 5r * \ln e$
6	Despejando la r de la ecuación	$r = \frac{\ln 2}{5} = 0.138629$
7	**(a) El modelo de la población en el tiempo, con la constante r encontrada**	$\boxed{N(t) = No\, e^{0.138629\, t}}$

1	Para encontrar el tiempo que se triplica la población igualamos el modelo de la población a 3No	$3No = No\, e^{0.138629\, t}$
2	Nuevamente se cancela No y se obtiene una ecuación para aplicar logaritmo.	$3\cancel{No} = \cancel{No}\, e^{0.138629\, t}$
3	Aplicar logaritmo natural a ambos lados de la ecuación	$\ln 3 = \ln\ e^{0.138629\, t}$
4	Utilizando las propiedades, bajamos el exponente 0.34657t como coeficiente del logaritmo	$\ln 3 = 0.138629\, t \ln e$
5	Despejando el tiempo de la ecuación	$t = \dfrac{\ln 3}{0.138629}$
6	**(b) El tiempo en el que se triplica la población**	$\boxed{t = 7.92 \text{ años}}$

Universidad de San Carlos de Guatemala | **Departamento de Matemática**
Facultad de Ingeniería | **Matemática Básica 1**

Tema 5: 15 puntos.

Dada la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$ si $x \leq 2$

Determinar:

a) La función inversa de $f(x)$

No	EXPLICACION	OPERATORIA
1	La función dada es:	$f(x) = x^2 - 4x + 3$
2	Se escribe la función $f(x)$ en su forma estándar	$f(x) = (x-2)^2 - 1$
3	Se procede a despejar la variable x	$y = (x-2)^2 - 1$ Quedando de la siguiente manera $y + 1 = (x-2)^2$
4	Se aplica raíz cuadrada a ambos lados de la función para eliminar exponenciales	$\sqrt{y+1} = x - 2$
5	La función despejada entorno a la variable x queda de la siguiente forma:	$x = 2 \pm \sqrt{y+1}$
6	Cambiando la variable x en vez de y	$y = 2 \pm \sqrt{x+1}$
7	Como el Dominio de $f(x)$esta de$(-\infty, 2]$ y su Rango es de $[-1, \infty)$ La función inversa de $f(x)$ es:	$\boxed{f'(x) = 2 - \sqrt{x+1}}$

b) Dominio y rango de $f^{-1}(x)$

No	EXPLICACION	OPERATORIA
1	Se sabe que el dominio de la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$ es:	Dominio: $(-\infty, 2]$ Rango: $[-1, \infty)$
2	Entonces el dominio y rango de la función inversa de f(x) es:	Dominio: $[-1, \infty)$ Rango: $(-\infty, 2]$

c) Trace $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ en el mismo plano de coordenadas cartesianas

EXPLICACION
Para trazar la gráfica se puede obtener dando valores a la función $f(x)$ de $(-\infty, 2]$

$$f(x) = f(x) = x^2 - 4x + 3$$

x	y
-2	15
-1	8
0	3
1	0
2	-1

$\mathbf{f'(x)}$(En base a tabla de $\mathrm{f(x)}$)

x	y
15	-2
8	-1
3	0
0	1
-1	2

Grafica