UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-101-5-M-2-00-2017

CURSO:	**Matemática Básica 1**
SEMESTRE:	**Segundo**
CÓDIGO DEL CURSO:	**101**
TIPO DE EXAMEN:	**1era Retrasada**
FECHA DE EXAMEN:	**Noviembre de 2017**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**B’alam Luis Gregorio Lol Alvarez**
REVISÓ EL EXAMEN:	**Ing. Mario de León**

EXAMEN DE PRIMERA RETRASADA

Tema 1 (20 puntos)

a) Resuelva la ecuación para $0 \leq x \leq 2\pi$

$$\cos(2x) + \cos(x) = 2$$

b) Resuelva la desigualdad

$$\left| \frac{3-4x}{5} \right| \leq 1$$

Tema 2 (20 puntos)

Dadas las circunferencias

C1: $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ C2: $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 9$

a) Determine el centro y radio de C1 y C2
b) Encuentre la ecuación de la recta que une los centros de las dos circunferencias
c) Determine la ecuación de la recta que es perpendicular a la del inciso (b) y para por el centro de C1.

Tema 3 (20 puntos)

Dada la función racional, analice si tiene agujeros, así como todos sus elementos (asíntotas horizontales, verticales, intersecciones con los ejes). Grafique la función.

$$f(x) = \frac{-2x^2 - 8x - 6}{x^2 - 1}$$

Tema 4 (20 puntos)

Una cónica tiene sus vértices en las coordenadas (1,2) y (7,2) y las ecuaciones de las asíntotas son $y = \pm\frac{2}{3}(x-4) + 2$. Encuentre la ecuación de la cónica, las coordenadas de los focos y grafique.

Tema 5 (20 puntos)

Dos móviles parten de un mismo punto. Uno se dirige hacia el norte y el otro hacia el este. Dos horas después del encuentro están separados 60 kilómetros. Encuentre la velocidad de cada móvil, si el que se dirige hacia el norte viaja 6 kilómetros por hora más rápido que el otro.

Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería
Departamento de matemática

Matemática Básica 1
Examen de 1ª retrasada
Noviembre de 2017

SOLUCIÓN

Tema 1 (20 puntos)

a) Resuelva la ecuación para $0 \le x \le 2\pi$

$$\cos(2x) + \cos(x) = 2$$

b) Resuelva la desigualdad

$$\left|\frac{3-4x}{5}\right| \le 1$$

No.	Explicación	Operatoria
1	a) Se busca escribir toda la ecuación en términos de una misma función trigonométrica del mismo ángulo, por ello se usa una identidad para convertir el ángulo doble a un ángulo simple	$Usando\ ...$ $Cos(2x) = 2Cos^2(x) - 1$ $Sustituyendo\ ...$ $Cos(2x) + Cos(x) = 2$ $2Cos^2(x) - 1 + Cos(x) = 2$ $2Cos^2(x) + Cos(x) - 3 = 0$
2	Se hace una sustitución para obtener una ecuación cuadrática	$Si \quad u = Cos(x)$ $2u^2 + u - 3 = 0$
3	Se factoriza la ecuación cuadrática y se obtiene las soluciones para u	$2u^2 + u - 3 = 0$ $(2u+3)(u-1) = 0$ $u = 1$ $u = -3/2$
4	Se vuelve a la variable x sustituyendo u Se toma la primera solución de u y se despeja x, para el intervalo solicitado en el enunciado se tienen 2 soluciones para x	$u = Cos(x)$ $Cos(x) = 1$ $x = Cos^{-1}(1)$ $x_1 = 0$ $x_2 = 2\pi$
5	Con la segunda solución de u no se obtiene soluciones para x	$Cos(x) = -\frac{3}{2}$ $x = Cos^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right) = \nexists$ $Soluciones$: $x_1 = 0$ $x_2 = 2\pi$

6	b) Primero se multiplican ambos lados de la desigualdad por 5 y se aplica la propiedad para desigualdades con valor absoluto que se muestra	$\left\|\frac{3-4x}{5}\right\| \leq 1$ $\|3-4x\| \leq 5$ $Usando:$ $\|x\| \leq a \rightarrow -a \leq x \leq a$ $\|3-4x\| \leq 5 = -5 \leq 3-4x \leq 5$
7	Se despeja la variable x Al despejar para cambiar el signo de la variable x , también se deben invertir los signos de Desigualdad Reordenando un poco para obtener la solución queda el conjunto de soluciones mostrado	$-5-3 \leq -4x \leq 5-3$ $-\frac{8}{4} \leq -x \leq \frac{2}{4}$ $-2 \leq -x \leq \frac{1}{2}$ $2 \geq x \geq -\frac{1}{2}$ $Soluciones: -\frac{1}{2} \leq x \leq 2$

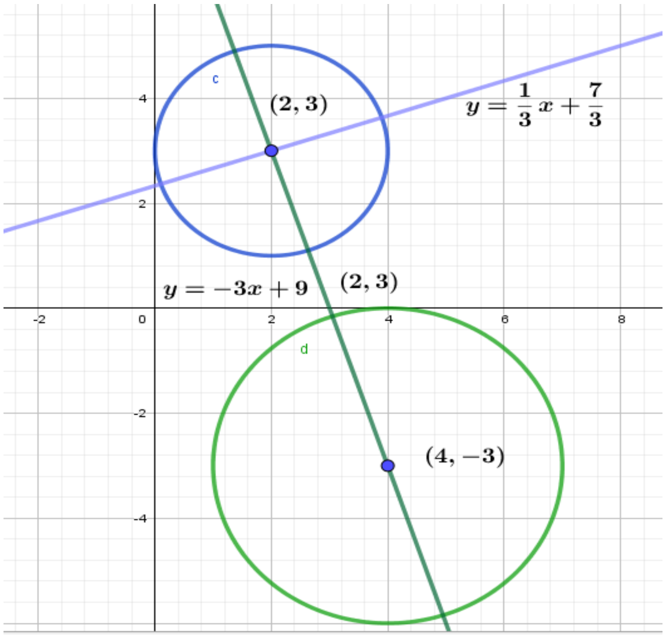
Tema 2 (20 puntos)

Dadas las circunferencias

C1: $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ C2: $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 9$

a) Determine el centro y radio de C1 y C2
b) Encuentre la ecuación de la recta que une los centros de las dos circunferencias
c) Determine la ecuación de la recta que es perpendicular a la del inciso (b) y para por el centro de C1.

No.	Explicación	Operatoria
1	a) Siendo la forma estándar de una circunferencia la que se muestra, donde (h,k) son las coordenadas del centro, se determinan las coordenadas del centro de $C2$	$Forma\ estándar\ de\ una\ circunferencia$ $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ $Centro\ C2: (4,-3)$ $radio\ C2: \quad 3$
2	Para determinar el centro y el radio de $C1$ se deben completar los cuadrados	$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = -9 + 9 + 4$ $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$ $Centro\ C1: (2,3)$ $radio\ C1: \quad 2$

3	b) Dado que se quiere determinar la ecuación de una recta, se necesitan conocer 2 puntos, estos dos puntos serán los centros de los círculos Primero se determina la pendiente con las coordenadas de los dos centros Luego se utiliza la forma punto-pendiente, con cualquiera de los dos puntos que se conocen	$Dos\ puntos\ a\ utilizar:$ $C1: \ (2,3)$ $C2: \ (4,-3)$ $Se\ calcula\ la\ pendiente$ $m = \frac{3-(-3)}{2-4} = -3$ $Forma\ punto - pendiente$ $y - y_0 = m(x - x_0)$ $Usando\ (x_0, y_0) = C1(2,3)$ $y - 3 = -3(x - 2)$ $y_1 = \ -3x + 9$
4	c) Para encontrar una recta dado que se conoce un punto por el que pasa también se debe conocer su pendiente Para que dos rectas sean perpendiculares se debe cumplir que el producto de sus pendientes debe ser igual a -1, dado que ya se conoce la pendiente de la recta que pasa por los centros se puede determinar la pendiente de la recta perpendicular Se usa la forma punto-pendiente con el punto $C1$	$Pendiente\ de\ recta\ que\ pasa\ por\ los\ centros$ $m_1 = -3$ $Pendiente\ de\ la\ recta\ perpendicular$ m_2 $m_1 * m_2 = -1$ $m_2 = -\frac{1}{m_1} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$ $Usando\ \ (x_0, y_0) = C1(2,3)$ $y - y_0 = m_2(x - x_0)$ $y - 3 = \frac{1}{3}(x - 2)$ $y_2 = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$
	La representación de las rectas y circunferencias es  	

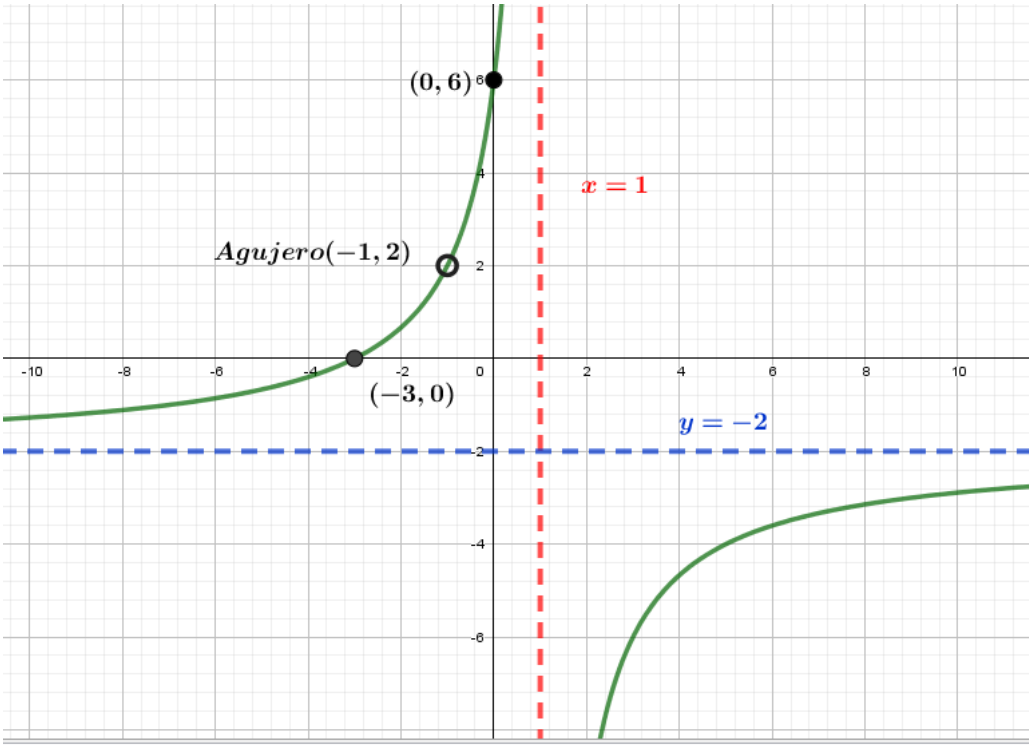
Tema 3 (20 puntos)

Dada la función racional, analice si tiene agujeros, así como todos sus elementos (asíntotas horizontales, verticales, intersecciones con los ejes). Grafique la función.

$$f(x) = \frac{-2x^2-8x-6}{x^2-1}$$

No	Explicación	Operatoria
1	Para determinar si la función tiene algún agujero se factoriza tanto el numerador como el denominador Al notar que el factor $x+1$ se simplifica por estar tanto en el numerador como en el denominador se debe igualar el factor, que se simplifica, a cero y luego se evalúa el valor de x en la función simplificada para conocer las coordenadas del agujero.	$f(x) = \frac{-2x^2-8x-6}{x^2-1} = \frac{-2(x+1)(x+3)}{(x+1)(x-1)}$ $Factor\ que\ se\ simplifica: (x+1)$ $x+1=0 \to \ x=-1$ $Agujero\ en\ x=-1$ $f(x) = \frac{-2(x+1)(x+3)}{(x+1)(x-1)} = \frac{-2(x+3)}{(x-1)}$ $f(-1) = \frac{-2(-1+3)}{-1-1} = 2$ $Agujero\ en: \ (-1,2)$
2	A partir de este punto todo el análisis se hará con la función simplificada Para las asíntotas verticales se iguala el denominador a cero	$f(x) = \frac{-2(x+3)}{(x-1)}$ $x-1=0$ $Asintona\ Vertical: x=1$
3	Dado que tanto el numerador como el denominador son polinomios del mismo grado, grado 1 en este caso, para poder determinar las asíntotas horizontales se deben dividir los coeficientes de las variables con mayor potencia	$f(x) = \frac{-2(x+3)}{(x-1)} = \frac{-2x-6}{1x-1}$ $Dividiedo\ los\ coeficientes$ $\frac{-2}{1} = -2$ $Asintota\ Horizontal: y=-2$
4	Para las intersecciones con el eje x se debe igualar la función a cero	$\frac{-2(x+3)}{(x-1)} = 0$ $-2x-6=0$ $x=-3$ $Interseccion\ con\ eje\ x: \ (-3,0)$

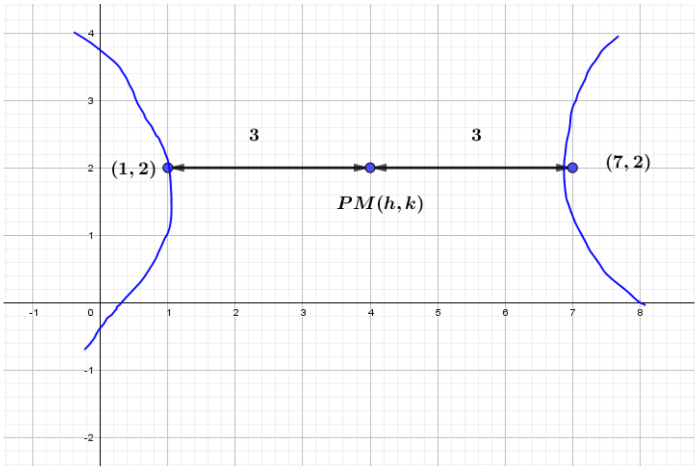
<table>
<tr>
<td>5</td>
<td>Para las intersecciones con el eje Y se debe evaluar $x = 0$ en la función</td>
<td>$$f(0) = \frac{-2(0+3)}{0-1} = 6$$ $Interseccion\ con\ el\ eje\ y\colon\ (0,6)$</td>
</tr>
<tr>
<td>6</td>
<td>Finalmente, para poder graficar se analiza el comportamiento de la función cuando toma valores cercanos a las asíntotas, esto se hace evaluando en la función valores cercanos a las asíntotas verticales por ejemplo para la asíntota $x = 1$ se evaluarán los valores $x = 1.001$ y $x = 0.998$
Como se muestra en la tabla</td>
<td>$Analizando\ el\ comportamiento\ cerca\ de\ las\ asintotas$
<table>
<tr><th>Asíntota</th><th>Numero a evaluar, a</th><th>Valor de la función, $f(a)$</th><th>Comportamiento</th></tr>
<tr><td>$x = 1$</td><td>1.001</td><td>-8002</td><td>La función tiende a $-\infty$</td></tr>
<tr><td></td><td>0.998</td><td>3998</td><td>La función tiende a $+\infty$</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>7</td>
<td colspan="2">La grafica de la función es la siguiente

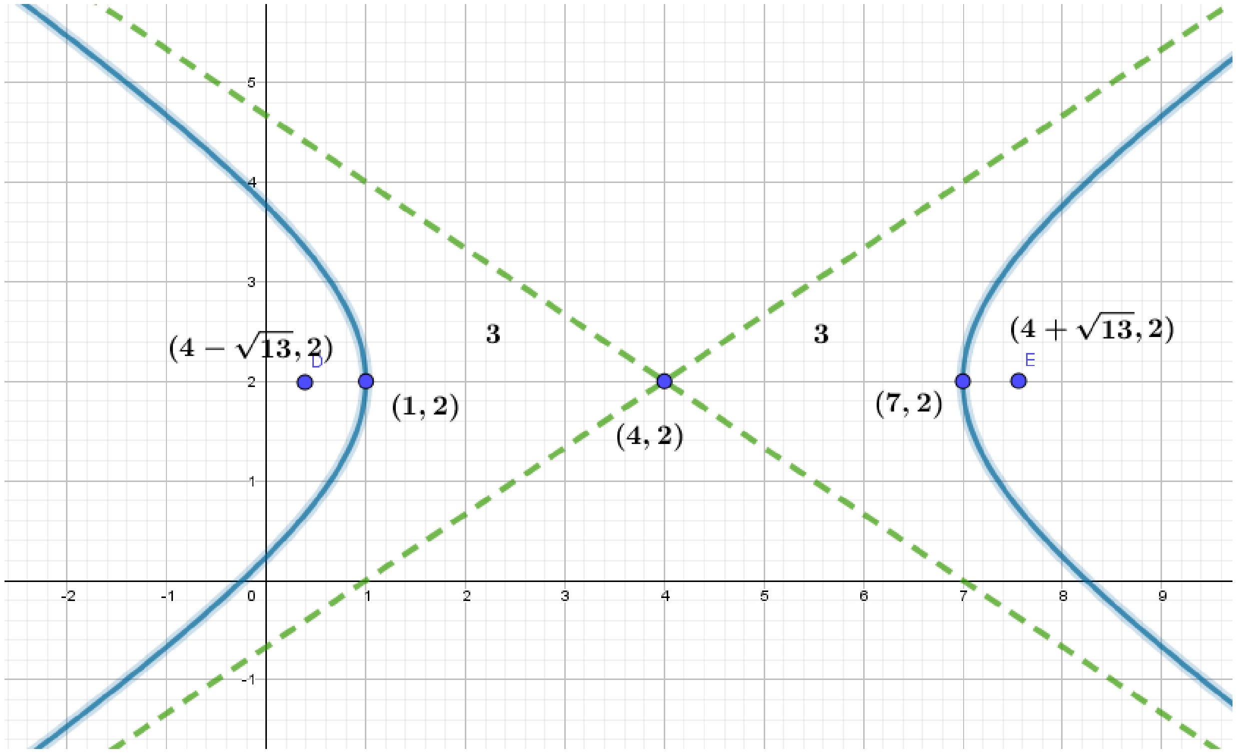


</td>
</tr>
</table>

Tema 4 (20 puntos)

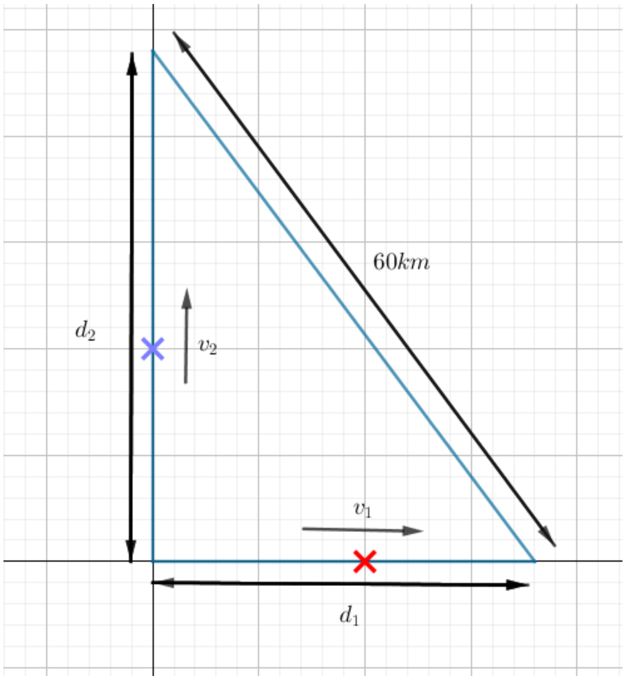
Una cónica tiene sus vértices en las coordenadas (1,2) y (7,2) y las ecuaciones de las asíntotas son $y = \pm\frac{2}{3}(x-4)+2$. Encuentre la ecuación de la cónica, las coordenadas de los focos y grafique.

No.	Explicación	Operatoria
1	Dado que se conocen los dos vértices de la cónica, el punto medio entre estos dos puntos será el centro de la cónica.	$V1(1,2)$ $V2(7,2)$ $PM = \left(\frac{1+7}{2}, \frac{2+2}{2}\right) = (4,2)$ $(h,k) = (4,2)$
2	Se grafican los dos vértices y el centro de la cónica en un plano cartesiano, se puede observar que la distancia del centro a cualquier vértice es de 3, por lo tanto, la constante a es igual a 3 Además, se analiza que por tener asíntotas la cónica debe ser una hipérbola, y por las coordenadas "y" de los vértices se trata de una hipérbola horizontal, como se muestra en el bosquejo.	 $Hiperola\ Horizontal$ $Asintotas\ con\ pendiente\ de\ la\ forma:$ $m = \pm\frac{b}{a}$
3	Dado que se tienen las ecuaciones de las asíntotas y además se conoce el valor de a, se puede despejar para encontrar b.	$Pendientes\ de\ asintotas$ $m = \pm\frac{2}{3}$ $Entonces\ \ldots$ $\pm\frac{b}{a} = \pm\frac{2}{3}$ $Dado\ que\ a = 3$ $\frac{b}{3} = \frac{2}{3}$ $b = 2$

		$Para\ hallar$ c $en\ una\ hiperbola:$ $c^2 = a^2 + b^2$ $\mathrm{c} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$ $Focos: (h \pm c, k)$ $Focos: \left(4+\sqrt{13}, 2\right)\ y\ \left(4-\sqrt{13}, 2\right)$
4	Las ecuación estándar de la hipérbola horizontal es de la siguiente forma, sustituyendo los valores de (h,k), a y b encontrados se obtiene la ecuación de la hipérbola	$Hiperbola\ Horizontal$ $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ $(h,k) = (4,2)$ $a = 3$ $b = 2$ $Sustituyendo\ \ldots$ $Ecuación:\ \frac{(x-4)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$
5	La grafica de la ecuación queda de la siguiente forma  	

Tema 5 (20 puntos)

Dos móviles parten de un mismo punto. Uno se dirige hacia el norte y el otro hacia el este. Dos horas después del encuentro están separados 60 kilómetros. Encuentre la velocidad de cada móvil, si el que se dirige hacia el norte viaja 6 kilómetros por hora más rápido que el otro.

No.	Explicación	Operatoria
1	Se hace un diagrama del viaje y se nombran todas las distancias y velocidades como se muestra 	
2	Se inicia aplicando el teorema de Pitágoras para las distancias que han recorrido cada uno de los vehículos y la distancia total entre ellos.	$Si\ todas\ las\ distancias\ estan\ en\ kilometros$ $(60)^2 = (d_1)^2 + (d_2)^2$
3	Ahora se plantean las distancias en términos de las velocidades sabiendo que la distancia es el producto de la velocidad por el tiempo. También se sabe que para que los dos vehículos estén separados por 60km deben transcurrir 2 horas, de ahí que $t = 2h$	$distancia = Velocidad * tiempo$ $d_1 = v_1 * t$ $d_2 = v_2 * t$ $Si\ t = 2\ horas$ $d_1 = 2v_1$ $d_2 = 2v_2$
4	Se sustituye $d_1\ y\, d_2$ en términos de las velocidades en la ecuación del teorema de Pitágoras	$(60)^2 = \ d_1{}^2 + d_2{}^2$ $Sustituyendo$ … $3600 = 4(v_1)^2 + 4(v_2)^2$

5	Ahora se utiliza la información que se tienen acerca de la relación que existe entre las velocidades de uno y otro vehículo. Se sustituye en la ecuación del teorema de Pitágoras y se desarrolla para obtener una ecuación cuadrática Se resuelve la ecuación cuadrática y se obtienen dos valores para v_1 Se tomará solo el valor positivo para que el móvil se mueva en la dirección que indica el enunciado	$Si\ todas\ las\ velocidades\ estan\ en\ km/h$ $v_2 = v_1 + 6$ $3600 = 4(v_1)^2 + 4(v_1 + 6)^2$ $900 = (v_1)^2 + (v_1)^2 + 12v_1 + 36$ $2(v_1)^2 + 12v_1 - 864 = 0$ $v_1 = \ -24$ $v_1 = 18$ $v_2 = 18 + 6 = 24$ $La\ velocidad\ del\ vehiculo\ que\ se\ mueve\ hacia\ el\ Norte\ es\ de\ 24km/\ h\ \ \ y\ \ la\ del\ otro\ es\ 18km/h$