UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-101-6-M-2-00-2017

CURSO:	**Matemática Básica 1**
SEMESTRE:	**Segundo**
CÓDIGO DEL CURSO:	**101**
TIPO DE EXAMEN:	**Segunda Retrasada**
FECHA DE EXAMEN:	**Enero de 2018**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**B'alam Luis Gregorio Lol Alvarez**
REVISÓ EL EXAMEN:	**Ing. Mario de León**

Examen de segunda retrasada

Tema 1: (20 puntos)

a. Encuentre las soluciones de la siguiente ecuación en el intervalo $0^o \leq \theta < 360^o$

$$10\ \text{sen}^2\theta - 7\ \text{sen}\theta - 12 = 0$$

b. Demuestre la siguiente identidad:

$$\frac{\tan}{1+\sec x} + \frac{1+\sec x}{\tan x} = 2\ \csc x$$

Tema 2: (20 puntos)

Dada la ecuación general de la elipse:

$$25x^2 + 100x + 9y^2 - 54y - 44 = 0$$

Entonces:

a. Escríbala en su forma estándar.

b. Encuentre las coordenadas de los vértices, focos y el centro. Grafique.

c. Encuentre los pares de coordenadas en la elipse para $x = -4$.

Tema 3: (20 puntos)

Dada la siguiente función trigonométrica:

$$f(x) = -4\ \text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$$

a. Determine el valor de la amplitud, periodo de la función y el cambio de fase.

b. Grafique la función.

Tema 4: (20 puntos)

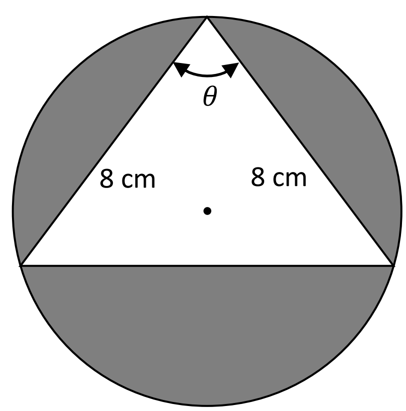
Mezclando una solución al 60% de ácido con otra al 20%, se desea obtener 600 ml de una solución al 30%. Determine los ml de solución al 60% de ácido que debe tomar para obtener la solución deseada.

Tema 5: (20 puntos)

La figura muestra un triángulo isósceles de lados iguales de 8 centímetros, los cuales forma un ángulo θ. El triángulo está inscrito en un círculo de radio igual a 5 centímetros. Calcule:

a. Las longitudes del lado faltante y de la altura del triángulo.

b. El área fuera del triángulo pero dentro del circulo (el área sombreada).



SOLUCIÓN

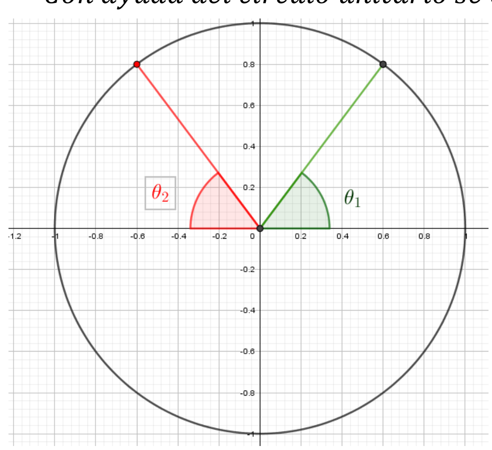
Tema 1: (20 puntos)

a. Encuentre las soluciones de la siguiente ecuación en el intervalo $0^o \leq \theta < 360^o$

$$10\ \text{sen}^2\theta - 7\ \text{sen}\,\theta - 12 = 0$$

b. Demuestre la siguiente identidad:

$$\frac{\tan}{1+\sec x} + \frac{1+\sec x}{\tan x} = 2\csc x$$

No.	Explicación	Operatoria
1	a) Se hace una sustitución para obtener una ecuación cuadrática y se resuelve para u	$Si\ \ u = Sen(\theta)$ $10\,Sen^2(\theta) - 7Sen(\theta) - 12 = 0 \rightarrow\ \ 10u^2 - 7u - 12 = 0$ $(2u-3)(5u+4=0)$ $u_1 = \frac{3}{2}$ $u_2 = \frac{4}{5}$
2	Se sustituye la variable u para cada una de las dos soluciones La solución $u = \frac{3}{2}$ no proporciona soluciones reales para la variable θ	$Para\ u = \frac{3}{2}$ $Sin(\theta) = \frac{3}{2}$ $\theta = Sin^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = \nexists$
3	Se resuelve para la segunda raíz con ayuda del seno inverso, sin embargo se debe analizar el circulo unitario para verificar si no hay una segunda solución para esta raíz como se muestra	$Sin(\theta) = \frac{4}{5}$ $\theta = Sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) = \ 0.927\ rad$ $Con\ ayuda\ del\ circulo\ unitario\ se\ encuentra\ otra\ solucion$  $\theta_2 = \pi -\ 0.927 = 2.214rad$ $Las\ soluciones\ en\ el\ intervalo\ [0,2\pi]\ son:$ $\theta = \{0.927rad,\ 2.214rad\}$

4	b) Para comprobar la identidad se utilizará el lado izquierdo Primero se suman las dos fracciones en una sola	$\frac{\tan(x)}{1+\sec(x)}+\frac{1+\sec(x)}{\tan(x)}=2\csc(x)$ $\frac{tan^2(x)+(1+se\,c(x))^2}{(1+\sec(x))\tan(x)}=2\csc(x)$ $\frac{tan^2(x)+1+2sec(x)+sec^2(x)}{(1+\sec(x))\tan(x)}=2\csc(x)$
5	Se utiliza una identidad para simplificar el numerador Se factoriza el numerador y se simplifica con el denominador Se reescriben las funciones secante y tangente en términos de senos y cosenos para simplificar	$Usando\colon\ tan^2(x)=sec^2(x)-1$ $\frac{sec^2(x)-1+1+2\,sec(x)+sec^2(x)}{(1+sec(x))\,tan(x)}=2\,csc(x)$ $\frac{2\,sec(x)+2\,sec^2(x)}{(1+sec(x))\,tan(x)}=2\,csc(x)$ $\frac{2\,sec(x)(1+sec(x))}{(1+sec(x))\,tan(x)}=2\,csc(x)$ $\frac{2\,sec(x)}{tan(x)}=2\,csc(x)$ $2*\frac{\frac{1}{cos(x)}}{\frac{sen(x)}{cos(x)}}=2\,csc(x)$ $2*\frac{1}{sen(x)}=2\,csc(x)$ $2\,csc(x)=2csc(x)$

Tema 2: (20 puntos)

Dada la ecuación general de la elipse:

$$25x^2 + 100x + 9y^2 - 54y - 44 = 0$$

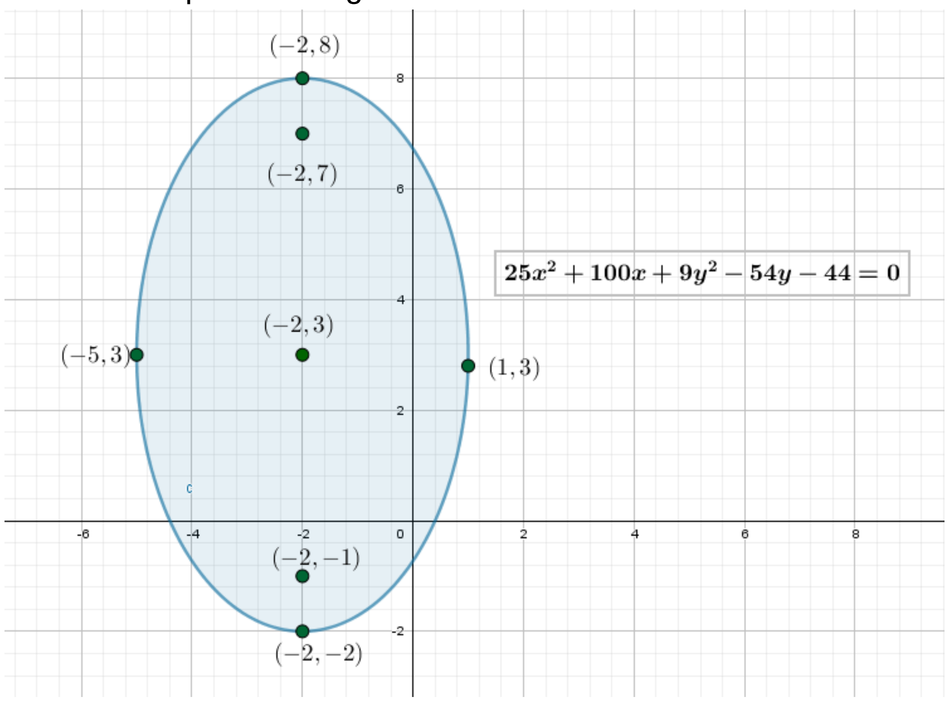
Entonces:

a. Escríbala en su forma estándar.

b. Encuentre las coordenadas de los vértices, focos y el centro. Grafique.

c. Encuentre los pares de coordenadas en la elipse para $x = -4$.

No.	Explicación	Operatoria
1	Primero se lleva la ecuación general a la ecuación estándar completando los cuadrados como se muestra	$25x^2 + 100x + 9y^2 - 54y - 44 = 0$ $25(x^2 + 4x) + 9(y^2 - 6y) = 44$ $25(x^2 + 4x + 4) + 9(y^2 - 6y + 9) = 44 + 100 + 81$ $25(x+2)^2 + 9(y-3)^2 = 225$ $\frac{25(x+2)^2}{225} + \frac{9(y-3)^2}{225} = \frac{225}{225}$ $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1$ $Elipse\ Vertical$
2	De la ecuación general se observan directamente las coordenadas del centro y los valores de las constantes a y b Con los valores de las constantes a y b se determina el valor de la constante c	$(h, k) = (-2,3)$ $a = 5$ $b = 3$ $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ $c = \sqrt{25 - 9} = 4$
3	Se determinan las coordenadas de los focos y los vértices con las constantes a y c	$Dado\ que\ la\ Elipse\ es\ vertical$ $Vertices\ Mayores: (h, k \pm a)$ $Vertices\ Menores: (h \pm b, k)$ $Focos: (h, k \pm c)$ $Vertices\ Mayores: (-2,3 \pm 5)$ $V1(-2,8)\ \ y\ \ V2(-2,-2)$ $Vertices\ Menores: (-2 \pm 3,3)$ $v1(1,3)\ \ y\ \ v2(-5,3)$ $Focos: (-2,3 \pm 4)$ $F1(-2,7)\ \ y\ \ F2(-2,-1)$

4	La representación de la elipse es la siguiente 

Tema 3: (20 puntos)

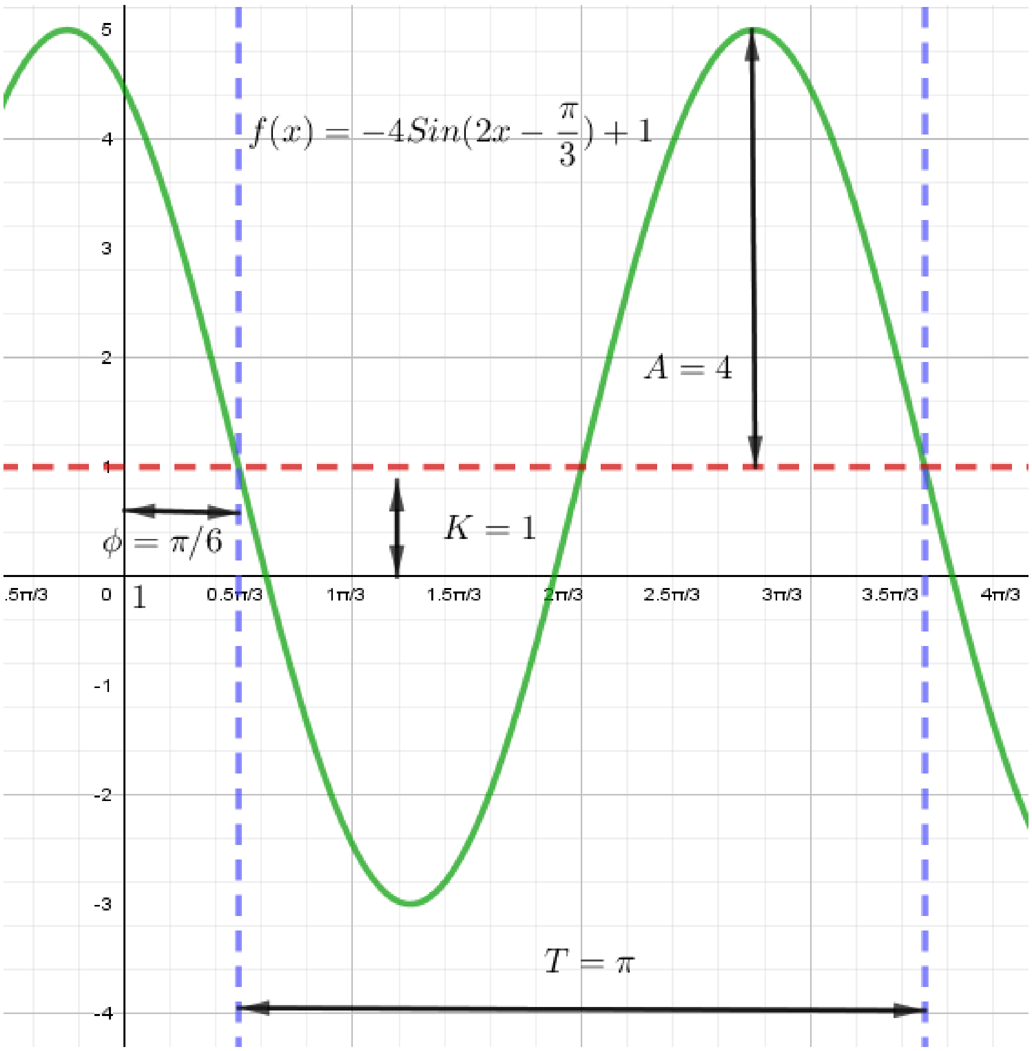
Dada la siguiente función trigonométrica:

$$f(x) = -4\ \mathrm{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$$

a. Determine el valor de la amplitud, periodo de la función y el cambio de fase.

b. Grafique la función.

No	Explicación	Operatoria
1	Se lleva la función senoidal a una forma estándar Donde: $A, es\ la\ amplitud$ $\omega, es\ la\ frecuencia\ angular$ $\varphi, es\ el\ \ desplazamiento\ de\ fase$	$f(x) = \ A\,\mathrm{sen}(\omega(x+\varphi)) + K$ $f(x) = -4\,\mathrm{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$ $Factorizando\ ...$ $f(x) = -4\,\mathrm{sen}\left(2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right) + 1$
2	Se observa de la función que la amplitud es 4 y el desplazamiento de fase es $+\frac{\pi}{6}$, el signo mas indica que la grafica se desplazó a la derecha	$A = 4$ $\varphi = \frac{\pi}{6}$

	Para calcular el periodo se utiliza la siguiente formula	$T = \frac{2\pi}{\omega}$ $Donde\ \omega = 2$ $T = \frac{2\pi}{2}$ $T = \pi$
3	$La\ funcion\ tiene\ una\ amplitud\ de\ 4, un\ desplazamientode\ \ fase\ de\ \frac{\pi}{6}\ a\ la\ derecha\ ,$ $y\ un\ periodo\ de\ \pi.\ La\ grafica\ es\ la\ siguiente:$  	

Tema 4: (20 puntos)

Mezclando una solución al 60% de ácido con otra al 20%, se desea obtener 600 ml de una solución al 30%. Determine los ml de solución al 60% de ácido que debe tomar para obtener la solución deseada.

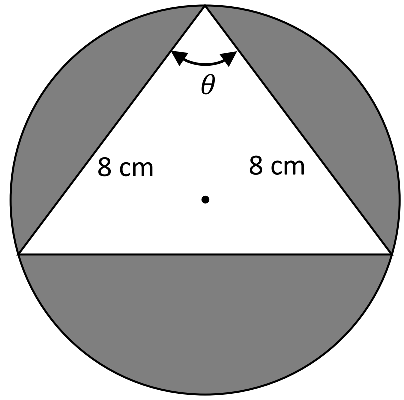
No.	Explicación	Operatoria
1	Se nombra a la cantidad de solución al 60% como "x" y a la cantidad de solución al 20% como "y" Ambas cantidades en total deben Sumar 600ml	$x \rightarrow Solucion\ al\ 60\%$ $y \rightarrow Solucion\ al\ 20\%$ $Si\ todas\ las\ cantidades\ estan\ en\ ml$ $x + y = 600$ $Despejando\ y$ $y = 600 - x$
2	Ahora se analizan las concentraciones. De la cantidad "x" el 60% será ácido, mientras que de la cantidad "y" el 20% será acido Si al final se necesita que el 30% de los 600ml sean ácido, la cantidad total de ácido será 180ml	$Cantidad\ de\ ácido\ en\ x$ $60\%\ es\ ácido = 0.6x$ $Cantidad\ de\ ácido\ en\ y$ $20\%\ es\ ácido = 0.2y$ $Cantidad\ de\ ácido\ total$ $30\%\ del\ total = 0.3 * 600 = 180ml$
3	Se suma la cantidad de ácido que hay en cada solución y se iguala a la cantidad de ácido total que debe haber al final	$0.6x + 0.2y = 180$
4	Se sustituye la variable "y" por el despeje que se hizo inicialmente Se despeja "x"	$Si\quad y = 600 - x$ $Sustituyendo \ldots$ $0.6x + 0.2(600 - x) = 180$ $0.6x + 120 - 0.2x = 180$ $0.4x = 60$ $x = 150$ $Se\ deben\ agregar\ 150ml\ de\ solución\ al\ 60\%$

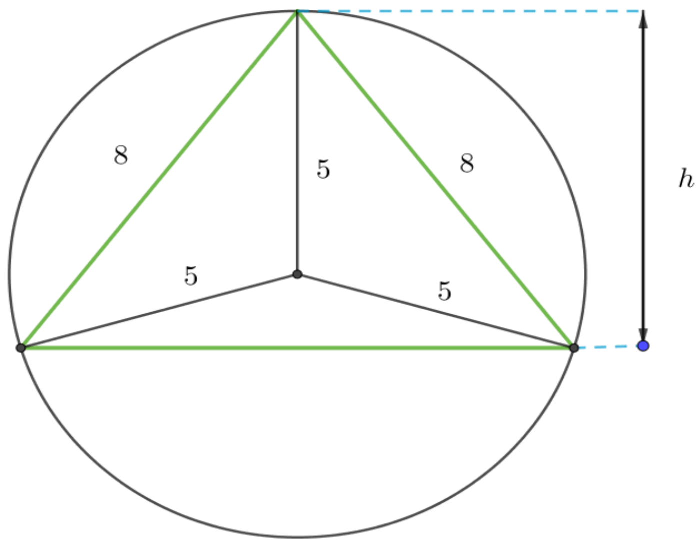
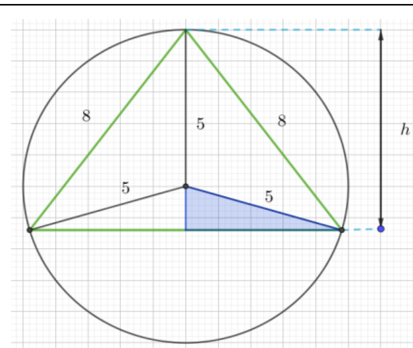
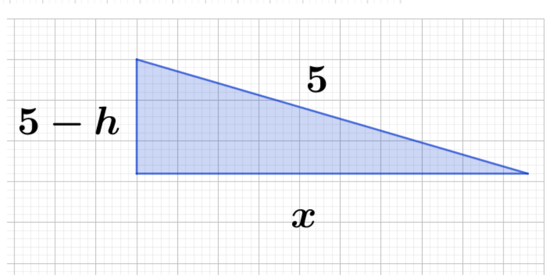
Tema 5: (20 puntos)

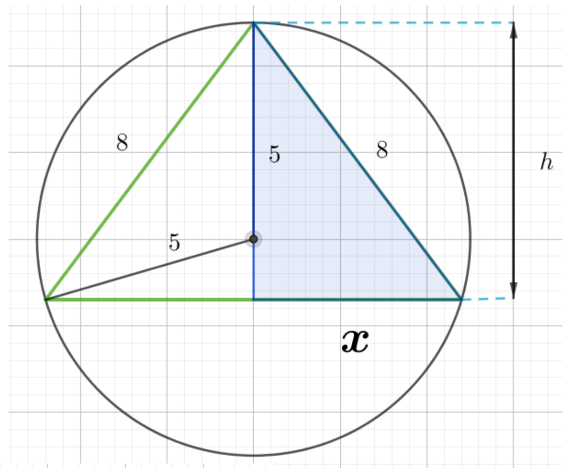
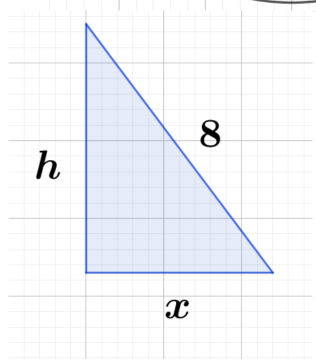
La figura muestra un triángulo isósceles de lados iguales de 8 centímetros, los cuales forma un ángulo θ. El triángulo está inscrito en un círculo de radio igual a 5 centímetros. Calcule:

a. Las longitudes del lado faltante y de la altura del triángulo.

b. El área fuera del triángulo, pero dentro del circulo (el área sombreada).



No.	Explicación	Operatoria
1	Se hace un diagrama de la situación y se nombran todas las distancias como se muestra 	
2	Se analiza el triángulo rectángulo que se forma al dividir en dos el triangulo inferior formado por los radios del círculo, se nombran sus lados como se muestra. Se aplica el teorema de Pitágoras para encontrar una ecuación que relacione las variables x y h	 *Por teorema de Pitagoras* $x^2 = 25 - (5-h)^2$ $x^2 = 25 - (25 - 10h + h^2)$ $x^2 = 10h - h^2$ 

3	Ahora se analiza el triángulo rectángulo que se forma al dividir en dos el triangulo isósceles, se debe notar que la base de este nuevo triangulo rectángulo es la misma que la del triángulo rectángulo anterior Nuevamente se aplica el teorema de Pitágoras para obtener una nueva ecuación.	$Por\ teorema\ de\ pitagoras$ $h^2 = 64 - x^2$
4	Se sustituye la ecuación encontrada en el paso 2 dentro de la que se encontró en el paso 3	$Sustituyendo:\ x^2 = 10h - h^2$ $en:\quad h^2 = 64 - x^2$ $h^2 = 64 - (10h - h^2)$ $h^2 = 64 - 10h + h^2$ $64 = 10h \rightarrow h = 6.4cm$
5	Para determinar el lado restante del triángulo isósceles se observa el dibujo inicial y se concluye que el lado faltante mide $2x$, usando la ecuación del paso 2 se calcula x	$Si:\ x^2 = 10h - h^2$ $ademas\ h = 6.4$ $x^2 = 64 - (6.4)^2$ $x = \pm 4.8$ $Se\ toma\ solo\ el\ vaor\ positivo$ $2x = 9.6$ $La\ altura\ del\ triangulo\ mide\ 6.4cm$ $y\ su\ base\ mide\ 9.6cm$
6	b) el área sombreada está dada por la resta del área del circulo con el área del triangulo	$A_{triangulo} = \frac{b*h}{2} = \frac{6.4*9.6}{2} = \frac{61.44}{2} \approx 30.72cm^2$ $A_{circulo} = \pi R^2 = \pi(5)^2 = 25\pi cm^2$ $As = A_{circulo\,-}\,A_{triangulo} = 25\pi - 30.72 \approx 47.82$ $El\ área\ sombreada\ es\ aproximadamente\ 47.82cm^2$