UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-103-1-V-1-00-2015

CURSO:	**Matemática Básica 2**
SEMESTRE:	**Primero**
CÓDIGO DEL CURSO:	**103**
TIPO DE EXAMEN:	**Primer Examen Parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**Febrero de 2015**
NOMBRE DE LA PERSONA QUE RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Edy Rodríguez**
NOMBRE DE LA PERSONA QUE REVISÓ EL EXAMEN:	**Ing. Alfredo González**

Guatemala, 17 de febrero de 2015

Primer examen parcial

Tema 1 (40 puntos)

Resuelva los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 2^-} \frac{x-1}{|x-1|}$ b) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin 3x}{x+\sin 2x}$ c) $\lim_{x\to 1^-} \frac{x^{1/2}-x}{x-1}$

d) Determine el valor de ***a*** para que $\lim_{x\to\infty} \frac{(ax-x)(2+ax)}{3x^2+1} = 2$

Tema 2 (15 puntos)

Utilizando la definición de derivada de una función, demuestre que la velocidad de un objeto que se mueve con aceleración constante ***a*** viene dada por $v(t) = v_0 + at$, si la función de posición es $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, (Considere constantes v_0 y s_0)

Tema 3 (15 puntos)

a) Encuentre los valores de las constantes ***a*** y ***b*** para que la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+3 & si \quad x<2 \\ ax+b & si \quad 2\le x<4 \\ 5 & si \quad x\ge 4 \end{cases}$$

sea continua en todos los reales, b) determine si la función es diferenciable en ***x=2*** y ***x=4***

Tema 4 (15 puntos)

Encuentre las coordenadas del punto de la parábola $y = 4 - x^2$, cuya recta tangente es perpendicular a la recta que pasa por el punto (4, 9/2)

Tema 5 (15 puntos)

Utilizando reglas de derivación, encuentre la derivada de las siguientes funciones

a) $y = \sqrt{x}\, e^x \tan x$ b) $y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$

SOLUCION DE EXAMEN

Tema 1 (40 puntos)

Resuelva los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 2^-} \frac{x-1}{|x-1|}$ b)$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin 3x}{x+\sin 2x}$ c)$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^{1/2}-x}{x-1}$

d) Determine el valor de ***a*** para que $\lim_{x\to\infty} \frac{(ax-x)(2+ax)}{3x^2+1} = 2$

a) $\lim_{x\to 2^-} \frac{x-1}{|x-1|}$

SOLUCIÓN

Utilizando $|x-1| = \begin{cases} x-1 & si \quad x-1 \geq 0 \quad x \geq 1 \\ -(x-1) & si \quad x-1 < 0 \quad x < 1 \end{cases}$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 2^-} \frac{x-1}{x-1} = 1}$$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin 3x}{x+\sin 2x}$

SOLUCIÓN

Manipulando la expresión:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\left(1-\frac{\sin 3x}{x}\right)}{x\left(1+\frac{\sin 2x}{x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1-\frac{3\sin 3x}{3x}\right)}{\left(1+\frac{2\sin 2x}{2x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1-3\cdot\frac{\sin(3x)}{3x}\right)}{\left(1+2\cdot\frac{\sin(2x)}{2x}\right)}$$

Aplicando

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1}$$

Aplicando el límite y sus propiedades:

$$\frac{1-3(1)}{1+2(1)} = -\frac{2}{3}$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin 3x}{x+\sin 2x} = -\frac{2}{3}}$$

c) $\lim_{x\to 1^-} \frac{x^{1/2}-x}{x-1}$

SOLUCIÓN

Se evalúa el límite:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^{1/2}-x}{x-1} = \frac{0}{0}$$

Manipulando la función:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^{\frac{1}{2}}\left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^{\frac{1}{2}}\left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)}{-\left(1-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{x}}{-\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

Evaluando el límite:

$$-\frac{\sqrt{1}}{1+\sqrt{1}} = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-} \frac{x^{1/2}-x}{x-1} = -\frac{1}{2}}$$

---

d) Determine el valor de ***a*** para que $\lim_{x\to\infty} \frac{(ax-x)(2+ax)}{3x^2+1} = 2$

SOLUCIÓN

Reordenando la función:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x(a^2-a)+x(2a-2)}{3x^2+1} = 2$$

Factorizando x^2 en denominador y numerador:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left[(a^2-a)+\frac{2a-2}{x}\right]}{x^2\left(3+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(a^2-a)+\frac{2a-2}{x}}{3+\frac{1}{x^2}} \quad = \quad \frac{a^2-a}{3}$$

Igualando el resultado:

$$\frac{a^2-a}{3}=2$$

$$a^2-a-6=0$$

$$(a-3)(a+2)=0$$

$$a_1=3 \quad a_2=-2$$

Tema 2 (15 puntos)

Utilizando la definición de derivada de una función, demuestre que la velocidad de un objeto que se mueve con aceleración constante ***a*** viene dada por $v(t)=v_0+at$, si la función de posición es $s(t)=s_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2$, (Considere constantes v_0 y s_0)

SOLUCIÓN

$$v_{(t)prom} = \frac{\Delta s}{\Delta t} v_{(t)ins} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$v_{(t)} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left[s_o+v_o(t+\Delta t)+\frac{1}{2}a(t+\Delta t)^2\right]-\left(s_o+v_ot+\frac{1}{2}at^2\right)}{\Delta t}$$

$$v_{(t)} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{s_o+v_ot+v_o\Delta t+\frac{1}{2}at^2+at\Delta t+(\Delta t)^2-s_o-v_ot-\frac{1}{2}at^2}{\Delta t}$$

$$v_{(t)} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{v_o\Delta t+at\Delta t+(\Delta t)^2}{\Delta t}$$

$$v_{(t)} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{t}(v_o+at+\Delta t)}{\Delta \boldsymbol{t}}$$

$$v_{(t)} = \lim_{\Delta t\to 0}(v_o+at+\Delta t)$$

Evaluando el límite:

$$v_{(t)} = v_o + at$$

$$\boldsymbol{v_{(c)} = v_o + ac}$$

Tema 3 (15 puntos)

a) Encuentre los valores de las constantes ***a*** y ***b*** para que la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3 & si \quad x < 2 \\ ax + b & si \quad 2 \le x < 4 \\ 5 & si \quad x \ge 4 \end{cases}$$

Sea continua en todos los reales, b) determine si la función es diferenciable en $\boldsymbol{x = 2}$ y $\boldsymbol{x = 4}$

SOLUCIÓN

Los puntos de empalme son $x = 2$ y $x = 4$, aplicar las condiciones de continuidad:

1. $f_{(a)} \quad Existe$
2. $\lim_{x\to a} f_{(x)} = \lim_{x\to a^-} f_{(x)} = \lim_{x\to a^+} f_{(x)}$
3. $f_{(a)} = \lim_{x\to a} f_{(x)}$

Evaluando la continuidad en $x = 2$

$$f_{(2)} = Existe$$

$$\lim_{x\to 2} f_{(x)} \quad , \quad \lim_{x\to 2^-} -x^2 + 3 = -1 \quad , \quad \lim_{x\to 2^+} (ax + b) = 2a + b$$

$\boldsymbol{Ecuación\ I} \qquad \boldsymbol{2a + b = -1}$

Evaluando la continuidad en $x = 4$

$$f_{(4)} = Existe$$

$$\lim_{x\to 4} f_{(x)} \quad , \quad \lim_{x\to 4^-} (ax + b) = 4a + b \quad , \quad \lim_{x\to 4^+} (5) = 5$$

$\boldsymbol{Ecuación\ II} \qquad \boldsymbol{4a + b = 5}$

Se tienen dos ecuaciones con dos incógnitas, por lo que se procede a resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2a + b = -1 \\ 4a + b = \ \ 5 \end{cases}$$

Se despeja b de la $Ecuación\ I$:

$$b = -2a - 1$$

Se sustituye la ecuación obtenida anteriormente en la $\boldsymbol{Ecuación\ II}$:

$$4a + (-2a - 1) = \quad 5$$

$$2a - 1 = 5$$

$$\boldsymbol{a = \frac{6}{2} = 3}$$

Se sustituye el resultado obtenido anteriormente en la Ecuación I despejada:

$$b = -2a - 1$$

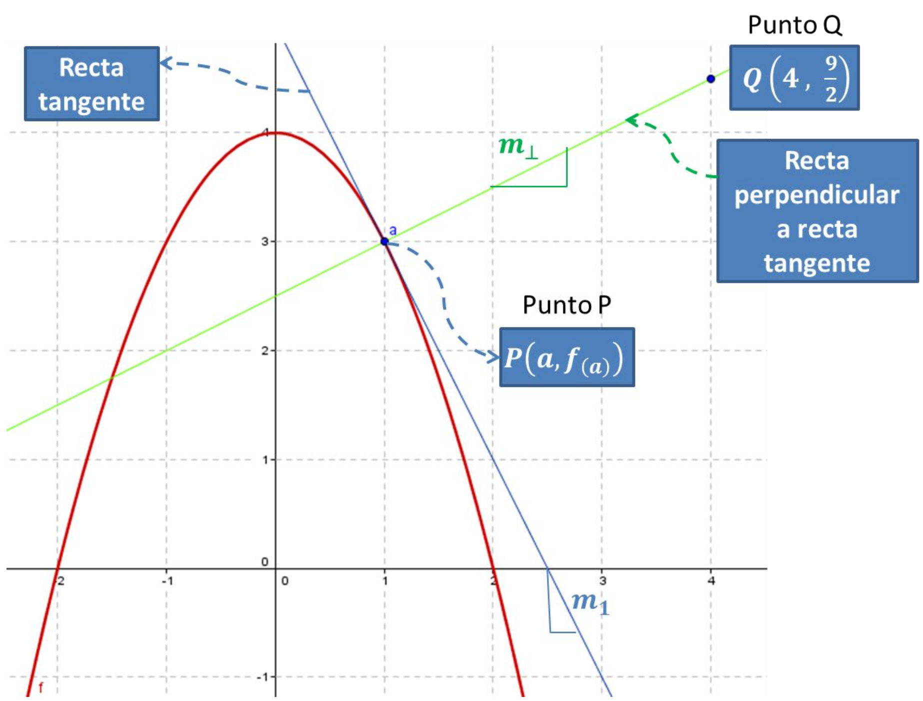
$$b = -2(3) - 1 = -7$$

Tema 4 (15 puntos)

Encuentre las coordenadas del punto de la parábola $y = 4 - x^2$, cuya recta tangente es perpendicular a la recta que pasa por el punto (4, 9/2)

<u>SOLUCIÓN</u>

El primer paso es hacer un esquema representativo de la información que se proporciona en el enunciado del ejercicio. Es importante notar que el punto dado, no forma parte de la curva $y = 4 - x^2$, además hay que notar que solamente existirá una recta que cumpla con las condiciones del problema.



El segundo paso es tener el concepto básico de rectas perpendiculares, ya que se sabe que el producto de sus pendientes debe ser igual a -1. De esta manera se tendrá que, la pendiente de la recta tangente (m_1) multiplicada con la pendiente de la recta perpendicular a la tangente sea igual a -1, como se muestra a continuación:

$$(m_1)(m_\perp) = -1$$

Se tienen dos puntos:

$$Q\left(4,\frac{9}{2}\right) \quad , \quad P\big(a, f_{(a)}\big)$$

Es importante darse cuenta, que el objetivo en este problema es encontrar el valor de la incógnita a, puesto que esta es la coordenada en x del punto de intersección de las dos rectas, y a final de cuentas es lo que solicita el problema. Cabe destacar que el punto P, debe expresarse de tal forma que sea posible dejarlo en términos de la incógnita a.

$$P\big(a, f_{(a)}\big)$$

Ahora notar que para obtener $f_{(a)}$, solamente hay que evaluar a en la función cuadrática que da el problema.

$$f_{(a)} = 4 - (a)^2$$

$$P(a, 4 - (a)^2)$$

Ahora bien, la pendiente de la recta perpendicular a la recta tangente es posible encontrarla a través del siguiente concepto, utilizando los puntos P y Q:

$$Q\left(4,\frac{9}{2}\right) \quad , \quad P(a, 4 - (a)^2)$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

$$m_{\perp} = \frac{\frac{9}{2} - (4 - a^2)}{4 - a} = \frac{\frac{1}{2} + a^2}{4 - a}$$

$$m_{\perp} = \frac{\frac{1}{2} + a^2}{4 - a}$$

Ahora es necesario retomar el concepto de rectas perpendiculares:

$$(m_1)(m_{\perp}) = -1$$

Es necesario notar que lo que se quiere es formar una ecuación tomando como base la formula anterior,pues hay que recordar que ya se tiene expresado $m_{\perp}$ en términos de a, ahora hace falta expresar m_1, también en términos de a, con el fin de tener una ecuación de una incógnita. Es por ello, que ahora se recure al concepto de derivada de una función, ya que se sabe que la derivada de una función representa la pendiente de la recta tangente en cada uno de sus puntos, sin embargo para el presente ejercicio solo importa la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto de intersección de las dos rectas, y esto es en $x = a$. Por lo tanto:

$$m_1 = f'_{(a)}$$

$$f_{(x)} = 4 - x^2$$

$$f'_{(x)} = -2x$$

$$f'_{(a)} = -2(a)$$

$$m_1 = -2a$$

Ahora que ya se tiene cada uno de los elementos necesarios para armar la ecuación se procede sustituir cada pendiente $m_1\ \ y\ \ m_{\perp}$ en términos de a, y luego se procede a resolver la ecuación:

$$(-2a)\left(\frac{\frac{1}{2}+a^2}{4-a}\right) = -1$$

$$(-2a)\left(\frac{1}{2}+a^2\right) = (-1)(4-a)$$

$$(2a)\left(\frac{1}{2}+a^2\right) = (4-a)$$

$$a + 2a^3 = 4 - a$$

$$2a^3 + 2a - 4 = 0$$

$$a^3 + a - 2 = 0$$

Es posible darse cuenta que la ecuación resultante es de grado 3 y que es necesario recurrir a la realización del método:

Posibles raíces:

$$posibles\ raices = \frac{p}{q} = \frac{\pm 2, \pm 1}{\pm 1}$$

$$Posibles\ raíces = \pm 2, \pm 1$$

Se realiza división sintética, intentando con $a = 1$

$a = 1$	a^3	a^2	a	c
	1	0	1	−2
		1	1	+2
	1	1	2	0

Por lo tanto al resultar cero el residuo de la división sintética, se puede confirmar que $a_1 = 1$ es una solución de la ecuación de tercer grado obtenida anteriormente, y que por tanto la ecuación podría reescribirse de la siguiente manera:

$$(a-1)(a^2 + a + 2) = 0$$

Por lo tanto ahora se puede resolver la ecuación de segundo grado de la siguiente manera:

$$a=\frac{-(1)\pm\sqrt{(1)^2-4(1)(2)}}{2(1)}$$

$$a=\frac{-1\pm\sqrt{1-8}}{2}$$

$$a=\frac{-1\pm\sqrt{-7}}{2}$$

$$a_2=\frac{-1+\sqrt{7}i}{2} \quad , \quad a_3=\frac{-1-\sqrt{7}i}{2}$$

Recordar que toda ecuación de grado 3 tiene tres soluciones. Además es necesario recordar que las raíces imaginarias siempre aparecen en parejas. Para el presente problema solo importan las soluciones reales, por lo tanto es necesario recordar que:

$$a_1=1$$

Por tanto este valor de a representa la coordenada en x en donde ambas rectas se intersectan. Para determinar el valor de la coordenada en y, es decir $f_{(a)}$ se debe evaluar a en la función cuadrática dada en el enunciado, de la siguiente forma:

$$f_{(x)}=4-x^2$$

$$f_{(a)}=4-(a)^2$$

$$f_{(1)}=4-(1)^2$$

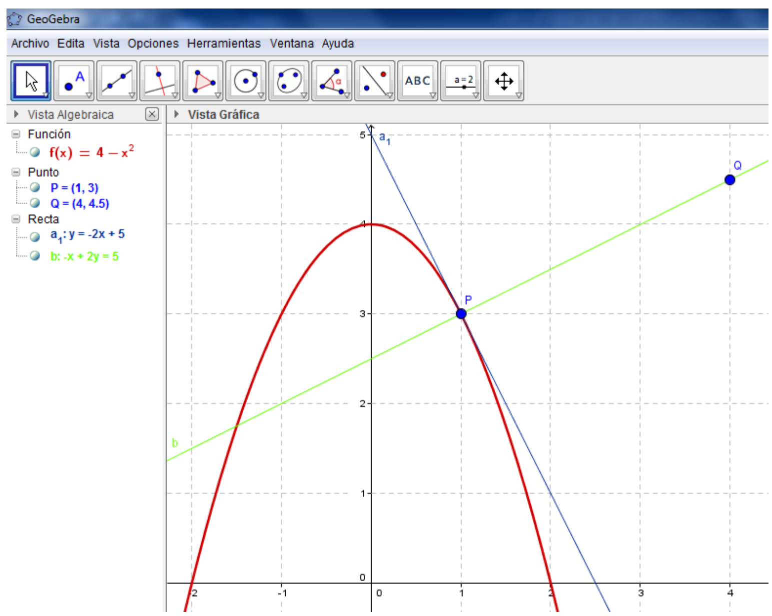
$$f_{(1)}=3$$

Por lo tanto las coordenadas del punto de intersección de ambas rectas seria:

$$P(a,f_{(a)})$$

$$P(a,4-a^2)$$

$$\boldsymbol{P(1,3)}$$



La figura mostrada en este apartado comprueba que los resultados obtenidos son correctos y que se ajusta a las condiciones que establece el problema.

Tema 5 (15 puntos)

Utilizando reglas de derivación, encuentre la derivada de las siguientes funciones

a) $y=\sqrt{x}\,e^x\tan x$ b) $y=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$

a) $\boldsymbol{y = \sqrt{x}\, e^x \tan x}$

SOLUCIÓN

$$y' = \left[\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}e^x\right)\right]\cdot(\tan x) + \left(\sqrt{x}e^x\right)\cdot\left[\frac{d}{dx}(\tan x)\right]$$

$$y' = \left[\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)\cdot e^x + \sqrt{x}\cdot\frac{d}{dx}(e^x)\right]\cdot(\tan x) + \left(\sqrt{x}e^x\right)\cdot\left[\frac{d}{dx}(\tan x)\right]$$

$$y' = \left[\frac{e^x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\cdot e^x\right]\cdot(\tan x) + \left(\sqrt{x}e^x\right)\cdot \sec^2 x$$

$$\boxed{\boldsymbol{y' = \frac{e^x\cdot\tan x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\cdot e^x\cdot\tan x + \sqrt{x}e^x\sec^2 x}}$$

b) $y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$

SOLUCIÓN

$$y' = \frac{(\sin x + \cos x)\cdot\frac{d}{dx}(\sin x - \cos x) - (\sin x - \cos x)\cdot\frac{d}{dx}(\sin x + \cos x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$y' = \frac{(\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x) + (\sin x - \cos x)(\sin x - \cos x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$y' = \frac{(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$y' = \frac{2(\sin^2 x + \cos^2 x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{y' = \frac{2}{(\sin x + \cos x)^2}}}$$