UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CLAVE-103-1-V-CV-00-2017

CURSO:	**Matemática Básica 2**
SEMESTRE:	**CURSO DE VACACIONES JUNIO**
CÓDIGO DEL CURSO:	**103**
TIPO DE EXAMEN:	**Primer Parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**Junio 2017**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Mario Rousselin**
CATEDRATICO:	**Ing. Orlando López**

Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería
Curso de Vacaciones Junio – 2017
MATEMÁTICA BÁSICA 2

PRIMER EXAMEN PARCIAL

INSTRUCCIONES: Desarrolle correctamente en el cuadernillo proporcionado cada uno de los planteamientos que a continuación se le proponen, *dejando constancia* de todos los procedimientos para *justificar sus respuestas*.

TEMA 1 (20 PUNTOS)

En los incisos a) y b) utilice leyes de los límites para evaluar el límite dado.

a) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x-\sqrt{x^2+x}}{10+x}$ b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{sen(2x)}{2x-\tan(x)}$

#	Explicación	Operatorio
1	Se factoriza la expresión por el factor común "x" en el denominador como en el numerador	$\lim_{x\to-\infty} \frac{x-\sqrt{x^2+x}}{10+x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(1-\frac{\sqrt{x^2+x}}{x})}{x(\frac{10}{x}+1)}$
2	Se simplifica la expresión	$\lim_{x\to-\infty} \frac{(1-\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}})}{(\frac{10}{x}+1)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(1-\sqrt{1+1/x})}{(\frac{10}{x}+1)}$
3	Se calcula los límites de cada expresión	$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{1+1/x} = \lim_{x\to-\infty} 1+1/x = 1$ $\lim_{x\to-\infty} (\frac{10}{x}+1) = 1$
4	Aplicando la ley de los límites de suma y división	$\lim_{x\to-\infty} \frac{(\lim_{x\to-\infty} 1 - \lim_{x\to-\infty} \sqrt{1+1/x})}{\lim_{x\to-\infty} (\frac{10}{x}+1)} = \frac{1-1}{0+1}$
5	Concluyendo	$\lim_{x\to-\infty} \frac{x-\sqrt{x^2+x}}{10+x} = 0$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \frac{x-\sqrt{x^2+x}}{10+x} = 0}$$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{sen(2x)}{2x-\tan(x)}$

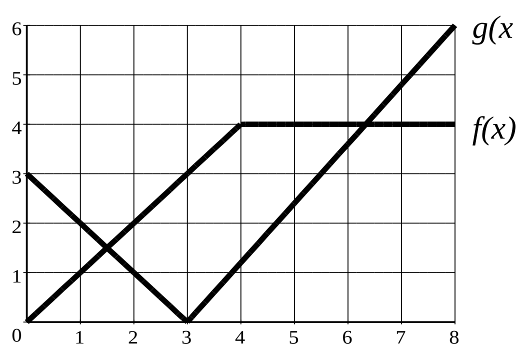
#	Explicación	Operatorio
1	Utilizando las identidades trigonométricas	$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x-\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{2x-\frac{\sin x}{\cos x}}$
2	Se simplifica la expresión	$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{\frac{2x\cos x-\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos^2 x}{2x\cos x-\sin x}$
3	Separando la expresión a conveniencia, conociendo que $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$	$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos^2 x}{x\,(2\cos x-\frac{\sin x}{x})}$
4	Aplicando la ley de los límites	$\lim_{x\to 0} 2\frac{\sin x}{x}\cos^2 x\cdot\frac{1}{(2\cos x-\frac{\sin x}{x})}$
5	Evaluando los limites	$\lim_{x\to 0}\frac{2(1)(1)}{2-1}=2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x-\tan x}=2$$

TEMA 2 (20 PUNTOS)

La siguiente figura, exhibe las gráficas de dos funciones *f* y *g*. Si $h(x)=f(x)+g(x)$ y $p(x)=g(f(x))$, obtenga lo indicado:

a) $h'(6)$. b) $h'(4)$ c) $p'(2)$ d) $p'(3)$



#	Explicación	Operatorio
1	Se definen las funciones a partir de la grafica	$f(x) = \begin{cases} x\ si\ 0 < x \leq 4 \\ 4\ si\ 4 < x \leq 8 \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} -x\ \ si\ 0 < x \leq 3 \\ \frac{6}{5}x\ si\ 3 < x \leq 8 \end{cases}$
2	Se deriva la expresión de h(x) a partir de las leyes de derivación	$h'(x) = f'(x) + g'(x)$
3	Evaluando	$h'(6) = f'(6) + g'(6) = 4 + \frac{6}{5} = 26/5$ $h'(4) = f'(4) + g'(4) = 0 + \frac{6}{5} = 6/5$
4	Se deriva la expresión de p(x) a partir de la regla de la cadena	$p'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$
5	Evaluando	$p'(2) = g'\big(f(2)\big)f'(2) = g'(2)(1) = -1$ $p'(3) = g'\big(f(3)\big)f'(3) = g'(3)(1) = 0$

$$\boxed{\begin{array}{c} \boldsymbol{h'(6)}=26/5 \\ \boldsymbol{h'(4)}=6/5 \\ p'(2)\ \ =-1 \\ \boldsymbol{p'(3)}=0 \end{array}}$$

TEMA 3 (15 PUNTOS)

Determine los valores de las constantes k y n de tal forma que f sea continua en $(-\infty, \infty)$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + k & si & x < -4 \\ x^2 + 4x + 2 & si & -4 \leq x \leq 4 \\ -nx - 2 & si & x > 4 \end{cases}$$

#	Explicación	Operatorio
1	Se aplica la definición la continuidad	$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$
2	Aplicando la definición para -4	$\lim_{x \to -4^-} 2x + k = \lim_{x \to -4} x^2 + 4x + 2$
3	Evaluando	$\lim_{x \to -4^-} 2(-4) + k = \lim_{x \to -4} (-4)^2 + 4(-4) + 2$ $-8 + k = 16 - 16 + 2$ $k = 2 + 8 = 10$

4	Aplicando la definición para 4	$\lim_{x\to 4^-} x^2 + 4x + 2 = \lim_{x\to 4} -nx - 2$
5	Evaluando	$\lim_{x\to 4^-} 4^2 + 4(4) + 2 = \lim_{x\to 4} -n(4) - 2$ $16 + 16 + 2 = -4n - 2$ $34 + 2 = -4n$ $\frac{36}{-4} = n$ $n = 9$

N=9 & k= 10

TEMA 4 (30 PUNTOS)
Encuentre las derivadas de las siguientes funciones, aplicando las leyes correspondientes y correctamente:

a) Encuentre $\frac{dy}{dx}$ si $y = \frac{\sin(x) - 4}{e^{2x} + 5}$

b) Encuentre $\frac{dy}{dx}$ si $y = (x^3 + 20x - 21)^4 (5x^4 - x - 4)^5$

#	Explicación	Operatorio
1	Se parte de la ley de derivada del cociente	$\frac{dy}{dx} = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ $y = \frac{\sin(x) - 4}{e^{2x} + 5}$ $u = \sin(x) - 4$ $\quad$ $v = e^{2x} + 5$ $u' = \cos(x)$ $\quad$ $v' = 2e^{2x}$
2	Reemplazando	$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x) \cdot (e^{2x} + 5) - 2e^{2x} \cdot (\sin(x) - 4)}{(e^{2x} + 5)^2}$
3	Evaluando	$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x}(\cos x - 2\sin x + 8) + 5\cos x}{(e^{2x} + 5)^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x}(\cos x - 2\sin x + 8) + 5\cos x}{(e^{2x} + 5)^2}$$

b)

#	Explicación	Operatorio
1	Se parte de la regla de la cadena y la ley de derivación del producto	$\frac{dy}{dx} = u'v + uv'$ $\frac{df(g(x))}{dx} = f'(g(x))g'(x)$
2	Reemplazando	$u = (x^3 + 20x - 21)^4$ $u' = 4(3x^2 + 20)(x^3 + 20x - 21)$ $v = 5x^4 - x - 4$ $v' = 20x^3 - 1$
3	Evaluando	$\frac{dy}{dx} = 4(3x^2 + 20)(x^3 + 20x - 21)(5x^4 - x - 4) + (20x^3 - 1)(x^3 + 20x - 21)^4$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = 4(3x^2 + 20)(x^3 + 20x - 21)(5x^4 - x - 4) + (20x^3 - 1)(x^3 + 20x - 21)^4}$$

TEMA 5 (15 PUNTOS)

Utilizando la definición de derivada como límite $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, encuentre la derivada de $f(x) = \sqrt{2x+1}$

#	Explicación	Operatorio
1	Aplicando la definición de la derivada como limite	$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2(x+h)+1} - \sqrt{2x+1}}{h}$
2	Desarrollando	$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2x+2h+1} - \sqrt{2x+1}}{\sqrt{h^2}}$
3	Se multiplica por la expresión $(\sqrt{2x+2h+1} + \sqrt{2x+1})$ arriba y debajo de la expresión	$\lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{2x+2h+1} - \sqrt{2x+1})}{\sqrt{h^2}} \times \frac{\sqrt{2x+2h+1} + \sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+2h+1} + \sqrt{2x+1}}$

4	Desarrollando	$\lim_{h\to 0}\frac{2x+2h+1-2x-1}{h(\sqrt{2x+2h+1}+\sqrt{2x+1})}$ $=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h\left(\sqrt{2x+2h+1}+\sqrt{2x+1}\right)}$ $=\lim_{h\to 0}\frac{2}{\left(\sqrt{2x+2h+1}+\sqrt{2x+1}\right)}$
5	Evaluando	$\lim_{h\to 0}\frac{2}{\left(\sqrt{2x+2h+1}+\sqrt{2x+1}\right)}$ $\lim_{h\to 0}\frac{2}{\left(\sqrt{2x+2(0)+1}+\sqrt{2x+1}\right)}$ $\lim_{h\to 0}\frac{2}{\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x+1}\right)}$ $\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2(x+h)+1}-\sqrt{2x+1}}{h}=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$