Universidad de San Carlos de Guatemala

Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemática
CLAVE-103-2-N-1-00-2015-S

Curso: Área Matemática Básica 2
Código de curso: 103
Semestre: Primer Semestre 2015
Tipo de Examen: Segundo Examen Parcial
Nombre de la persona
que resolvió el examen: Luis Fernando Morales Mejicanos
Catedrático del curso: Ing. Oswaldo Escobar

Universidad de San Carlos de Guatemala.
Facultad de Ingeniería. Departamento de Matematica.
Matematica Basica 2
Segundo parcial - 10 abril de 2015

TEMA 1 (20 PUNTOS)

Analizar si es creciente, decreciente, máximos, mínimos, concavidades, puntos de inflexión y grafica de $f(x) = \frac{1}{12}X^4 + \frac{1}{3}X^3 - X + 1$

TEMA 2 (20 PUNTOS)

Una escalera de 60 pies resbala en la parte inferior a 1.4 p/s sobre un talud inclinado 75 grados con la horizontal. Calcular con qué rapidez se desliza la parte superior y con qué rapidez cambia el ángulo inferior de la escalera con el piso, cuando la parte inferior está a 20 pies del talud.

TEMA 3 (15 PUNTOS)

Calcular la derivada de: $y = 2X^{\ln X}$

TEMA 4 (15 PUNTOS)

Un reactor autor regenerador convierte el uranio 238 relativamente estable en el isotopo plutonio 239. Después de 15 años se determina que se desintegro 0.043% de la cantidad inicial Ao de plutonio. Calcule la vida media de este isotopo si la rapidez de desintegración es proporcional a la cantidad presente.

TEMA 5 (20 PUNTOS)

Cuáles son las dimensiones del máximo cono que se puede inscribir en una esfera de radio 10 m.

TEMA 6 (15 PUNTOS)

Construiremos 10000 envases de aluminio en forma de cilindro circular cerrado, de 20 cm de alto y 10 cm de radio, con pared de 0.2 mm de espesor, use diferenciales para estimar que cantidad de aluminio utilizaremos.

TEMA 1

Para analizar si la función es creciente o decreciente, su concavidad, y sus máximos y mínimos, es necesario conocer las primeras dos derivadas de la misma.

$$f(x)=\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{3}x^3-x+1$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-1$$

$$f''(x)=2x+x^2$$

Es posible determinar los puntos en los que la función puede alcanzar un punto máximo o un mínimo, esto se lleva a cabo igualando la primera derivada a 0 y encontrando sus raíces. Es necesario el uso de una calculadora debido a la complejidad de la ecuación.

$$\frac{1}{3}x^3+x^2-1=0$$

$$x_1=-2.53209$$
$$x_2=-1.3473$$
$$x_3=0.879385$$

Los tres valores de x encontrados indican que, al evaluar la función en cualquiera de los tres valores, se encontrará un máximo o un mínimo. Una vez encontrados, se podrán definir intervalos abiertos en los que se observará el comportamiento creciente o decreciente de la función. Se define creciente si el resultado de evaluar f'(x) > 0, o decreciente si f'(x) < 0.

Intervalos: $(-\infty,-2.53209),(-2.53209,-1.3473),(-1.3473,0.879385),(0.879385,\infty)$

Intervalo	x	f'(x)	Tipo
(-00,-2.53209)	-3	-1	Decreciente
(-2.53209,-1.3473)	-2	1/3	Creciente
(-1.3473,0.879385)	0	-1	Decreciente
(0.879385,00)	1	1/3	Creciente

Para definir los máximos y mínimos, se utilizan los valores de x encontrados de la ecuación de la primera derivada y se evalúan en la segunda derivada. Para ello, se define como mínimo si f''(x) > 0, y como máximo si f''(x) < 0

x	f(x)	f''(x)	Tipo
-2.53209	1.5462	1.3473	Mínimo
-1.3473	1.80667	-0.879383	Máximo
0.879385	0.387131	2.53209	Mínimo

Para encontrar los puntos de concavidad de la función es necesario igualar la segunda derivada a 0 y encontrar sus raíces.

$$x^2+3x=0$$
$$x(x+2)=0$$
$$x_4=0$$
$$x_5=-2$$

Una vez encontrados los valores en x en los que la función puede ser convexa hacia arriba o hacia abajo, se forman intervalos entre estos. Si f''(x) < 0 es cóncava hacia abajo y si f''(x)>0 es cóncava hacia arriba.

Intervalos: $(-\infty,-2),(-2,0),(0,\infty)$

Intervalo	x	f(x)	f''(x)	Tipo
(-00,-2)	-3	1.75	3	Arriba
(-2,0)	-1	1.75	-1	Abajo
(0,00)	1	0.41667	3	Arriba

Conociendo la concavidad de cada intervalo, ahora se proceden a calcular los puntos de inflexión, para ello se utilizará la tercera derivada dentro de las comprobaciones.

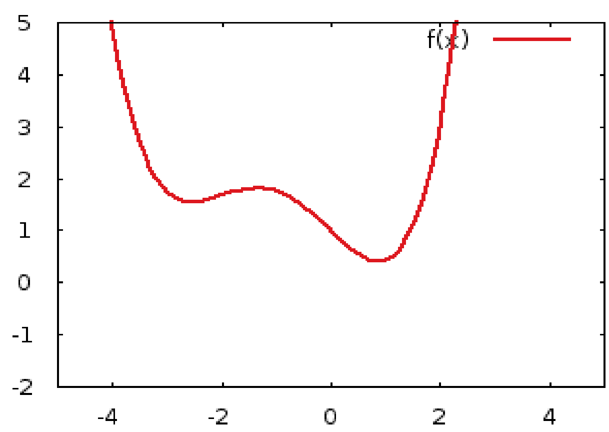
$$f'''(x)=2+2x$$

Los puntos de inflexión se encuentran evaluando las raíces de la segunda derivada, si f''(x) = 0 y f'''(x) != 0 entonces en x se encuentra un punto de inflexión. Para éste caso se realizan las comprobaciones en la siguiente tabla.

x	f(x)	f'''(x)	Inflexión?
0	1	2	Sí
2	3	-2	Sí

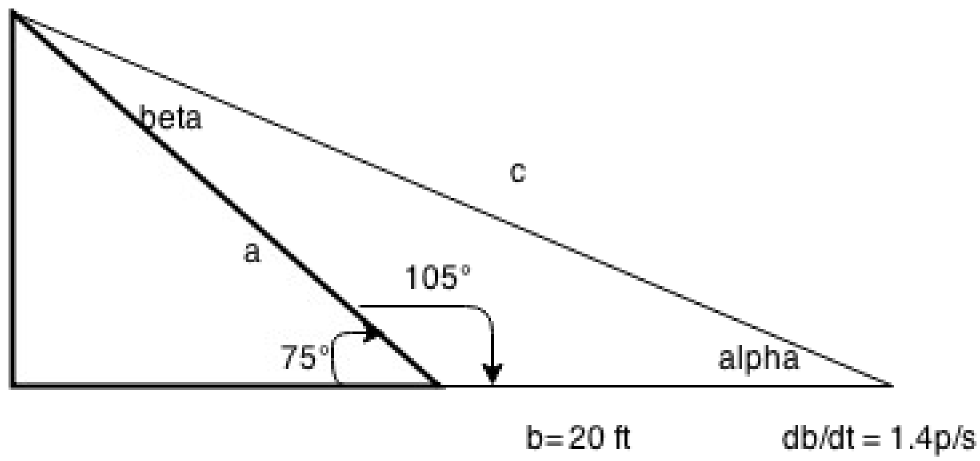
En el caso descrito, ambas raíces de la segunda derivada son puntos de inflexión.

Con los datos calculados anteriormente se procede a realizar la gráfica de la función, la cual es la siguiente:



TEMA 2

Dado el siguiente dibujo



Donde c = 60 ft. Representa la escalera inclinada sobre el talud. Para encontrar la rapidez con la que se desliza la parte superior es necesario encontrar una función que relacione el único ángulo conocido y constante, para ello se utiliza la ley del coseno para el lado c. Con ello, es posible encontrar el valor instantáneo de a.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab * \cos(\gamma)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab * \cos(105°)$$
$$60^2 = a^2 + 20^2 - 2(20)\cos(105°)a$$
$$a^2 - 40\cos(105°)a - 60^2 + 20^2 = 0$$

Resolviendo para a por medio de fórmula cuadrática, se obtienen los resultados:

$$a_1 = -61.9813$$
$$a_2 = 51.6285$$

Tomando como valor de a el valor positivo.

Se deriva de forma implícita con respecto al tiempo t

$$\frac{d\,c^2}{dt} = \frac{d\,a^2}{dt} + \frac{d\,b^2}{dt} - 2\cos(105°) * \frac{d\,a*b}{dt}$$
$$2c\frac{dc}{dt} = 2a\frac{d\,a}{dt} + 2b\frac{db}{dt} - 2\cos(105°) * \left(\frac{da}{dt} * b + \frac{db}{dt} * a\right)$$

Dado a que el lado C nunca cambiará se toma a dc/dt = 0, y se resuelve para da/dt

$$0 = 2a\frac{da}{dt} + 2b\frac{db}{dt} - 2\cos(105°)b\frac{da}{dt} - 2\cos(105°)a\frac{db}{dt}$$

$$\cos(105°)\, b\frac{da}{dt} - a\frac{da}{dt} = b\frac{db}{dt} - \cos(105°)\, a\frac{db}{dt}$$
$$\frac{da}{dt}(\cos(105°) - a) = b\frac{db}{dt} - \cos(105°)\, a\frac{db}{dt}$$
$$\frac{da}{dt} = \frac{b\frac{db}{dt} - \cos(105°)\, a\frac{db}{dt}}{\cos(105°) - a}$$

Se sustituyen los valores en la ecuación para poder conocer el valor de da/dt

$$\frac{da}{dt} = \frac{20*1.4 - \cos(105°)*51.63*1.4}{\cos(105°) - 51.63}$$
$$\frac{da}{dt} = -0.9002\, ft/s$$

Con ello se conoce la velocidad con la que se desliza la escalera en la parte superior.

Para encontrar la rapidez con la que decrece el ángulo es necesario plantear una relación en la que no se conozca el ángulo deseado, para ello se utiliza la ley del coseno para el lado b. Gracias a ello podremos encontrar el ángulo beta.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$
$$2bc\cos(\alpha) = b^2 + c^2 - a^2$$
$$\cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$$
$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{20^2 + 60^2 - 51.63^2}{2*20*60}\right)$$
$$\alpha = 56.22°$$

Dado el ángulo beta, se procede a derivar implícitamente con respecto al tiempo la ley del coseno del lado b, y se resuelve para d beta/dt.

$$2a\frac{da}{dt} = 2b\frac{db}{dt} + 2c\frac{dc}{dt} - \left(2bc*(-\sin(\alpha))\frac{d\alpha}{dt} + 2\cos(\alpha)\frac{d\,bc}{dt}\right)$$
$$a\frac{da}{dt} = b\frac{db}{dt} + c\frac{dc}{dt} - bc*(-\sin(\alpha))\frac{d\alpha}{dt} - \cos(\alpha)*\left(b\frac{dc}{dt} + c\frac{db}{dt}\right)$$
$$\frac{dc}{dt} = 0$$
$$a\frac{da}{dt} = b\frac{db}{dt} + bc\sin(\alpha)\frac{d\alpha}{dt} - \cos(\alpha)\, c\frac{db}{dt}$$
$$bc\sin(\alpha)\frac{d\alpha}{dt} = a\frac{da}{dt} + \cos(\alpha)\, c\frac{db}{dt} - b\frac{db}{dt}$$
$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{a\frac{da}{dt} + \cos(\alpha)\, c\frac{db}{dt} - b\frac{db}{dt}}{bc\sin(\alpha)}$$

Al sustituir valores en la ecuación, la razón de cambio del ángulo inferior es:

$$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{51.63*-0.9002+\cos(56.22)*60*1.4-20*1.4}{20*50\sin(56.22)}$$

$$\frac{d\alpha}{dt}=-0.0334\,°/s$$

TEMA 3

Dada la ecuación, se divide dentro de 2 y se aplica logaritmo natural de ambos lados.

$$y = 2x^{\ln(x)}$$
$$\frac{y}{2} = x^{\ln(x)}$$
$$\ln\left(\frac{y}{2}\right) = \ln\left(x^{(\ln(x))}\right)$$

Se aplican las leyes de los logaritmos.

$$\ln\left(\frac{y}{2}\right) = \ln(x) * \ln(x)$$
$$\ln\left(\frac{y}{2}\right) = (\ln(x))^2$$

Para este caso se aplica la derivación implícita.

$$y' \frac{1}{y} = \frac{2\ln(x)}{x}$$
$$y' = \frac{2\ln(x) y}{x}$$
$$y' = \frac{4\ln(x) x^{\ln(x)}}{x}$$

TEMA 4

Para ello es necesario plantear la ecuación diferencial:

$$\frac{dm}{dt}=km$$

La cual posee una única solución:

$$m(t)=m_0 e^{kt}$$

Con los datos dados, se dice que 0.043% hace falta de la cantidad inicial después de 15 años. Ese dato nos ayudará a encontrar la constante de decaimiento radioactivo.

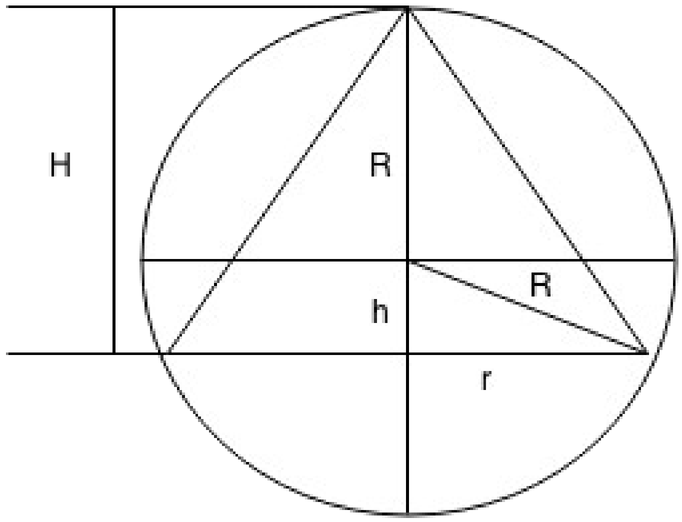
$$m(15)=(100-0.043)m_0$$
$$(100-0.043)m_o=100\,m_0\,e^{15k}$$
$$99.957\,m_0=100\,m_0\,e^{15k}$$
$$\frac{99.957}{100}=e^{15k}$$
$$\ln\left(\frac{99.957}{100}\right)=15k\ln e$$
$$k=\frac{\ln\left(\frac{99.957}{100}\right)}{15}$$
$$k=-0.000028673$$

Dada la constante de decaimiento radioactivo, es posible encontrar la vida media del plutonio.

$$m(t)=m_0 e^{-0.000028673t}$$
$$0.5\,m_0=m_0 e^{-0.000028673t}$$
$$0.5=e^{-0.000028673t}$$
$$\ln(0.5)=\ln\left(e^{-0.000028673t}\right)$$
$$\ln(0.5)=-0.000028673\,t\ln e$$
$$t=\frac{\ln(0.5)}{-0.000028673}$$
$$t=24174.21\,\hat{a}$$

TEMA 5

Es posible realizar el análisis del problema en dos dimensiones, por lo que se tiene el siguiente dibujo:



El volumen del cono está dado por:

$$Vc=\frac{1}{3}\pi*r^2H$$

Donde:

$$H=R+h$$

Es posible plantear h en términos de las otras dos variables mostradas en el triángulo interior formado con el radio de la esfera, el radio del cono y la diferencia entre H y el radio de la esfera. Podemos identificar un triángulo rectángulo, por lo que la función a utilizar es el teorema de Pitágoras.

$$R^2=r^2+h^2$$

Sin embargo, h no está directamente en la función que se desea optimizar, a como sí está r, por lo que procedemos a despejar el elemento cuadrático de r para sustituirlo en el volumen del cono.

$$r^2=R^2-h^2$$

$$Vc=\frac{1}{3}\pi\left(R^2-h^2\right)*\left(R+h\right)$$

$$Vc=\frac{1}{3}\pi\left(R^3+R^2h-Rh^2-h^3\right)$$

De esta forma es se deja el volumen en función de una sola variable. Ahora es posible obtener su primera derivada e igualarla a 0 para encontrar el volumen máximo del cono.

$$Vc' = \frac{1}{3}\pi\left(R^2 - 2Rh - 3h^2\right)$$
$$0 = \frac{1}{3}\pi\left(R^2 - 2Rh - 3h^2\right)$$
$$3h^2 + 2Rh - R^2 = 0$$
$$3h^2 + 2*10h - 100 = 0$$
$$3h^2 + 20h - 100 = 0$$

Al sustituir el valor de R, la ecuación se convierte en una ecuación cuadrática de una variable, por lo que al resolverla se obtienen los siguientes resultados:

$$h_1 = -10$$
$$h_2 = \frac{10}{3}$$

Utilizamos el segundo valor, puesto que no es posible tener dimensiones negativas. La pregunta del problema es dar las dimensiones del cono máximo, por lo que las dimensiones son:

$$H = R + h$$
$$H = 10 + \frac{10}{3}$$
$$H = \frac{40}{3} = 13.33$$

El valor de r está dado por:

$$r^2 = R^2 - h^2$$
$$r^2 = 100 - \frac{100}{9}$$
$$r^2 = 88.89$$
$$r = \sqrt{88.89} = 9.43$$

TEMA 6

Para encontrar la cantidad de aluminio utilizada por cada lata, es necesario plantear la derivada del volumen en función del área superficial del cilindro cerrado, sumando el área superficial del cilindro vació más el área de las dos tapas.

$$\frac{dV}{dr}=A_s$$
$$\frac{dV}{dr}=2\pi r h+2\pi r^2$$

Donde h está dado por la altura del cilindro y r por su radio.

La cantidad de aluminio utilizado está dado por el diferencia del volumen, por lo que se despeja el mismo de la ecuación anterior.

$$dV=dr\left(2\pi r h+2\pi r^2\right)$$

Al sustituir valores se obtiene la cantidad de aluminio utilizado.

$$dV=2\pi(0.02\,cm)\left(10\,cm*20\,cm+(10\,cm)^2\right)$$
$$dV=2\pi(0.02\,cm)\left(200\,cm^2+100\,cm^2\right)$$
$$dV=2\pi(0.02\,cm)\left(300\,cm^2\right)$$
$$dV=2\pi\left(6\,cm^3\right)$$
$$dV=12\pi=37.70\,cm^3$$

El volumen total de aluminio usado en todas las latas está dado por:

$$V_t=10000*dV$$
$$V_t=10000*37.7\,cm^3$$
$$V_t=377000\,cm^3$$