UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-103-3-M-2-00-2017

CURSO:	**Matemática Básica 2**
SEMESTRE:	**Segundo**
CÓDIGO DEL CURSO:	**103**
TIPO DE EXAMEN:	**Tercer Examen Parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**24 de octubre de 2017**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Kevin Itzep**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Kevin Itzep**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

Tercer examen parcial

Temario D

Tema 1: (14 puntos)

Suponga que $y = ax^2 + bx + c \geq 0$ sobre el intervalo $[0,k]$. Utilice límites y sumas de Riemann, para mostrar que el área bajo la curva, sobre el intervalo indicado está dada por $A = a\dfrac{k^3}{3} + b\dfrac{k^2}{2} + ck$

Tema 2: (20 puntos)

a. Trace la gráfica de la función $y = 1 - |x|$. Evalúe la integral $\int_{-2}^{3} (1 - |x|)dx$ interpretándola en términos de áreas de figuras geométricas.

b. Dada la función $g(x) = \int_{\sqrt{x}}^{5x} e^{-t^2} dt$. Utilice el teorema fundamental del cálculo obtener $g'(x)$.

Tema 3: (20 puntos)

a. Evalúe la integral

$$\int x\sqrt{3x+1}\,dx$$

b. Utilice el teorema fundamental del cálculo y una sustitución adecuada para obtener que

$$\int_c^d f(x)f'(x)dx = \frac{1}{2}\left[(f(d))^2 - (f(c))^2\right]$$

Tema 4: (20 puntos)

Calcular el área de la región limitada por las gráficas de

$$y = 2e^x - 1, \qquad y = e^x \qquad \& \qquad y = 3$$

Tema 5: (26 puntos)

Calcular el volumen del sólido obtenido al girar la región limitada por las gráficas de la parábola $y = x^2$, la recta $2x - y = 0$.

a. Al rededor de la recta $x = 3$ utilizando el método de arandelas.

b. Al rededor de la recta $y = -3$ utilizando el método de cascarones cilíndricos.

Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería

Departamento de Matemática
Matemática Básica 2
24 de octubre del 2017

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema 1: 14 puntos

$$A = a\frac{k^3}{3} + b\frac{k^2}{2} + ck.$$

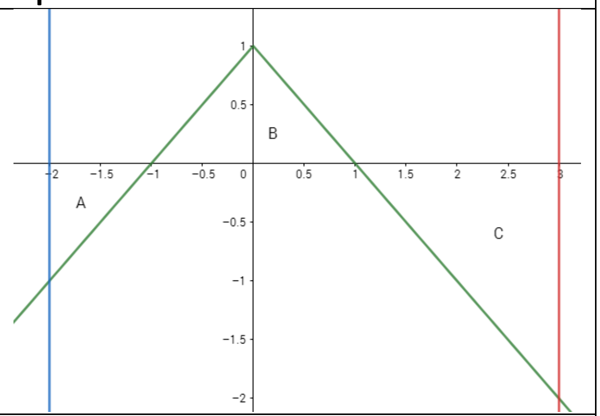
No.	Explicación	Operatoria
1.	Primero se determinan delta y coeficiente i.	$\Delta x = \frac{k-0}{n} = \frac{k}{n}$, $x_i = 0 + \frac{k}{n}i = \frac{k}{n}i$
2.	La sumatoria de Riemann está dada de la siguiente manera:	$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x$
3.	Aplicando la suma de Riemann	$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \left[a\left(\frac{k}{n}i\right)^2 + \frac{bk}{n}i + c\right]\left[\frac{k}{n}\right]$
4.	Aplicando algebra En este caso solo se multiplica el factor de afuera por toda la expresión	$A = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=0}^{n}\left[a\left(\frac{k}{n}i\right)^2\right]\left[\frac{k}{n}\right] + \sum_{i=0}^{n}\left[\frac{bk}{n}i\right]\left[\frac{k}{n}\right] + \sum_{i=0}^{n}\left[\frac{ck}{n}\right]\right]$
5.	Resolviendo la sumatoria para el primer termino, donde se valúa el limite cuando n tiende a infinito, donde se sabe que todo número al ser dividido por un numero mucho mayor tiende a cero.	$\sum_{i=0}^{n}\left[a\left(\frac{k}{n}i\right)^2\right]\left[\frac{k}{n}\right]$ $= \sum_{i=0}^{n}\left[a\frac{k^3}{n^3}i^2\right] = a\frac{k^3}{n^3}\sum_{i=0}^{n} i^2$ $= \lim_{n\to\infty}\left[a\frac{k^3}{n^3}\left[\frac{2n^3+3n^2+n}{6}\right]\right]$

		$= \lim_{n\to\infty}\left[a\frac{2k^3n^3}{6n^3} + a\frac{3n^2k^3}{6n^3} + a\frac{nk^3}{6n^3}\right]$ $\lim_{n\to\infty}\left[a\frac{2k^3}{6} + a\frac{3k^3}{6n} + a\frac{k^3}{6n^2}\right]$ $= a\frac{k^3}{3} + 0 + 0$ $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\left[a\left(\frac{k}{n}i\right)^2\right]\left[\frac{k}{n}\right] = a\frac{k}{3}$
6.	Resolviendo la sumatoria para el segundo término.	$\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{bk}{n}i\right]\left[\frac{k}{n}\right] =$ $\sum_{i=0}^{n}\frac{bk^2}{n^2}i = \frac{bk^2}{n^2}\sum_{i=0}^{n}i = \left[\frac{bk^2}{n^2}\right]\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$ $\frac{bk^2(n^2+n)}{2n^2} =$ $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{bk^2}{2} + \frac{bk^2}{2n}\right] = \frac{bk^2}{2} + 0$ $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{bk}{n}i\right]\left[\frac{k}{n}\right] = b\frac{k^2}{2}$
7.	Resolviendo la sumatoria para el tercer termino	$\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{ck}{n}\right] = \left[\frac{ck}{n}\right]\sum_{i=0}^{n}1 = \left[\frac{ck}{n}\right]n$ $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{ck}{n}\right]n = \lim_{n\to\infty}ck = ck$

R./ $A = a\frac{k^3}{3} + b\frac{k^2}{2} + ck$

Tema 2: 20 puntos

a) Trace la gráfica de la función $y = 1 - |x|$. Evalué la integral $\int_{-2}^{3}(1-|x|)dx$ interpretandola en términos de áreas de figuras geométricas.

No.	**Explicación**	**Operatoria**
1.	Primeramente, graficamos la función	
2.	La integral se calcula mediante área bajo la curva de los triángulos. A, B, C.	$\int_{-2}^{3}(1-\lvert x\rvert)dx = A_b - A_a - A_c$
3.	Se procede a encontrar el valor del área para cada triangulo.	$A_a = \frac{base_a * altura_a}{2}$, $base_a = \lvert 1-\lvert 2\rvert\rvert = 1$, $altura_a = 1, A_a = \frac{1*1}{2} = \frac{1}{2}$ $A_b = \frac{base_b * altura_b}{2}$, $base_b = 2$, $altura_b = \lvert 1-\lvert 0\rvert\rvert = 1$, $A_b = \frac{2}{2} = 1$ $A_c = \frac{base_c * altura_c}{2}$, $base_c = 2, altura_c = \lvert 1-\lvert 3\rvert\rvert = 2$, $A_c = \frac{2*2}{2} = 2$
4.	Se procede a sumar las áreas de cada triangulo, asumiendo que arriba de la recta horizontal es positivo y debajo de ella es negativo	$A = A_b - A_a - A_c = 1 - 2 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$

R./

$$A = -\frac{3}{2}$$

b.) Dada la función $g(x) = \int_{\sqrt{x}}^{5x} e^{-t^2} dt$, utilize el teorema fundamental del calculo para obtener $g'(x)$.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Definimos $G(x)$ como la antiderivada de e^{-t^2}	$G'(x) = e^{-t^2}$
2.	Aplicando el teorema fundamental del calculo	$\int_{5x}^{\sqrt{x}} e^{-t^2} = G(\sqrt{x}) - G(5x)$
3.	Se deriva	$g'(x) = \frac{d}{dx}[G(\sqrt{x}) - G(5x)]$ $= 5e^{-(5x)^2} - \left(-\frac{e^{-\sqrt{x}^2}}{2\sqrt{x}}\right)$

R./

$$g'(x) = \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}} - 5e^{-(5x)^2}$$

Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería

Departamento de Matemática
Matemática Básica 2
24 de octubre del 2017

Tema 3: 20 puntos

a) Evalué la integral $\int x\sqrt{3x+1}dx$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se determina que parámetro de la integral será u.	$u = 3x+1\,, du = 3dx - 0, x = \dfrac{u-1}{3}$
2.	Se hace un cambio de variables de "x" a "u"	$\dfrac{1}{3}\int\left[\dfrac{u-1}{3}\right]\sqrt{u}\,du = \dfrac{1}{3}\int\left(u^{\frac{3}{2}} + \sqrt{u}\right)du$
3.	Resolviendo la integral.	$\dfrac{1}{9}\left[\dfrac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + \dfrac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c\right] = \dfrac{2}{45}u^{\frac{5}{2}} - \dfrac{2}{27}u^{\frac{3}{2}} + c$ $= u^{\frac{3}{2}}\left(\dfrac{2}{45}u - \dfrac{2}{27}\right) + c$
4.	Aplicando algebra y cambio de variables de "u" a "x"	$u^{\frac{3}{2}}\left(\dfrac{54u-90}{1215}\right) + c$ $= (3x+1)^{\frac{3}{2}}\left(\dfrac{54(3x+1)-90}{1215}\right) + c$ $(3x+1)^{\frac{3}{2}}\left(\dfrac{54x-90}{1215}\right) + c$ $= \dfrac{(2x-1)^{\frac{3}{2}}(18x-4)}{135} + c$

R./

$$\int x\sqrt{2x-1}dx = \frac{(3x+1)^{\frac{3}{2}}(18x-4)}{135} + c$$

b) Utilice el teorema fundamental del cálculo y una sustitución adecuada para obtener que $\int_a^b f(x)f'(x)dx = \frac{1}{2}\left[\left(f(b)\right)^2 + \left(f(a)\right)^2\right]$

No	EXPLICACION	OPERATORIA
1	Se determina que parámetro de la integral será u.	$u = f(x), du = f'(x)dx, \int_c^d udu = \left[\frac{1}{2}u^2\right]_c^d$
2	Se sustituye en la ecuación original	$\left[\frac{1}{2}f(x)^2\right]_c^d = \frac{1}{2}\left[\left(f(d)\right)^2 - \left(f(c)\right)^2\right]$

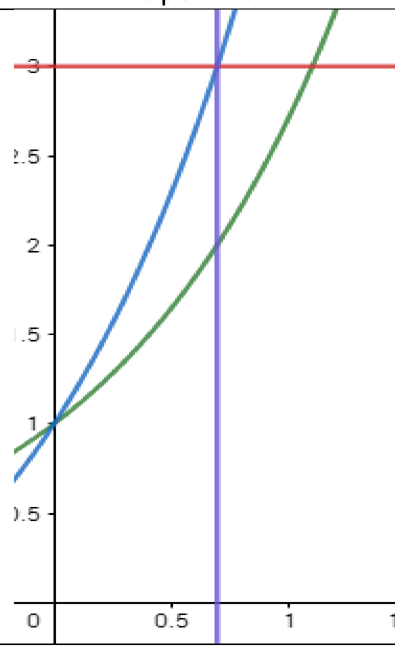
R./

$$\int_c^d f(x)f'(x)dx = \frac{1}{2}\left[\left(f(d)\right)^2 + \left(f(c)\right)^2\right]$$

Tema 4: 20 puntos

Calcular el área de la región limitada por las graficas

$$y = 2e^x - 1; y = e^x; y = 2$$

No.	Explicación	Operación
1	Se grafica	
2	Se debe de calcular dos integrales. Ya que se puede observar que hay más de un área que interviene dos tipos de graficas	$A = \int_0^a (2e^x - 1 - e^x)dx + \int_a^b (2 - e^x)dx$
3	Determinan las intersecciones de la graficas.	Donde a es la interseccion entre $y = 2e^x - 1$ & $y = 2$ Donde b es la interseccion entre $y = e^x$ & $y = 2$ $3 = 2e^x - 1 => x = \ln(2)$ $3 = e^x => x = \ln(3)$
4	Sustituyendo datos y resolviendo la integral.	$= \int_0^{\ln(2)} (e^x - 1)dx + \int_{\ln(2)}^{\ln(3)} (3 - e^x)dx$ $A = (e^x - x)\Big\|_0^{\ln(2)} + (3x - e^x)\Big\|_{\ln(2)}^{\ln(3)}$ $A = (2 - \ln(2)) - (1 - 0) + (3\ln(3) - 3) - (3\ln(2) - 2)$ $= 0.52325u^2$

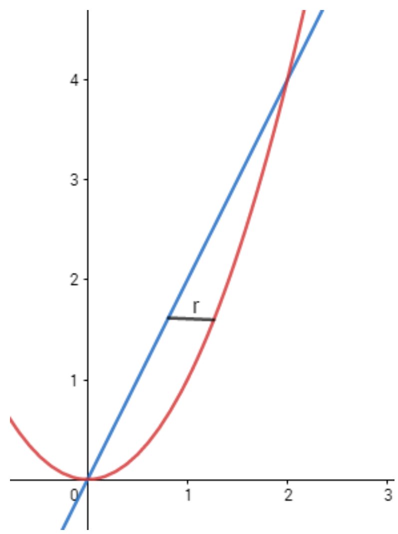
R./

$$A = 0.52325u^2$$

Tema 5: 26 puntos.

Calcular el volumen del solido obtenido al girar la región limitada por las gráficas de la parábola $y = x^2$, y la recta $2x - y = 0$

a.) Alrededor de la recta $x = 2$ utilizando el método de arandelas.



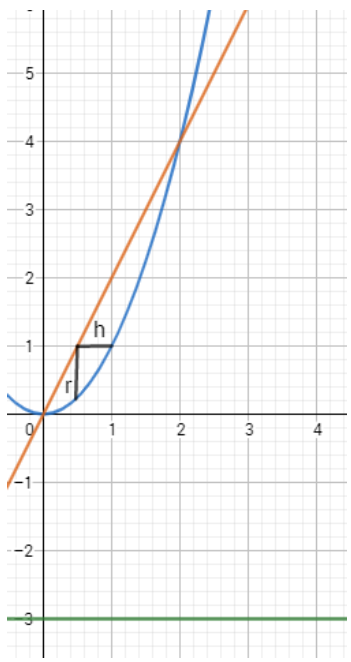
No.	Explicación	Operación
1	Se encuentran las intersecciones	$x^2 = 2x \Rightarrow x_1 = 0, y_1 = 0 \;\&\; x_2 = 2, y_2 = 4$
2	Se plantea el volumen	$V = \pi \int_0^4 \left[\left(2 - \frac{y}{2}\right)^2 - \left(2 - \sqrt{y}\right)^2\right] dy$
3	Resolviendo la integral	$\pi \int_0^4 \left[\frac{y^2}{4} - 2y + 4 - y + 4\sqrt{y} - 4\right] dy$ $= \pi \int_0^4 \left[\frac{y^2}{4} - 3y + 4\sqrt{y}\right] dy$ $\pi \left[\frac{y^3}{12} - \frac{3}{2}y^2 + \frac{8}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 =$

		$\pi\left[\frac{4^3}{12}-\frac{3}{2}*4^2+\frac{8}{3}*4^{\frac{3}{2}}-0\right]$

R./

$$A=\frac{8\pi}{3}u^3$$

b.) Al rededor de la recta $y=-2$ utilizando el metodo de cascarones cilindricos.



No.	Explicación	Operatoria
1	Determinando el radio "r" y la altura "h"	$r=y+2\,;h=\sqrt{y}-\frac{y}{2}$

2	Aplicando la integral	$A = 2\pi \int_0^4 (y+2)\left(\sqrt{y} - \frac{y}{2}\right) dy =$ $2\pi \int_0^4 \left[y^{\frac{3}{2}} - \frac{y^2}{2} - y + 2\sqrt{y} \right] dy$
3	Resolviendo la integral	$A = 2\pi \left[\frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{y^3}{6} - \frac{y^2}{2} + \frac{4}{3} y^{\frac{3}{2}} \right] \begin{matrix} 4 \\ 0 \end{matrix}$ $= 2\pi \left[\frac{2 * 4^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{4^3}{6} - \frac{4^2}{2} + \frac{4}{3} * 4^{\frac{3}{2}} + 0 \right]$

R./ $A = \frac{48}{5} \pi \, u^3$