UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-103-3-M-2-00-2017

CURSO:	**Matemática Básica 2**
SEMESTRE:	**Segundo**
CÓDIGO DEL CURSO:	**103**
TIPO DE EXAMEN:	**Tercer examen parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**17 de octubre del 2017**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Kevin Pinto**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Kevin Pinto**
REVISÓ EL EXAMEN:	**Dra. Mayra Castillo**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

Tercer examen parcial

Tema 1: (30 puntos)

a. Calcule la integral indefinida:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 5}$$

b. Calcule la integral definida

$$\int_2^4 x^2\sqrt{x^3 - 4}\ dx$$

c. Calcule:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{\cos x}^{1} \sqrt{t^3 + 5t}\,dt\right]$$

Tema 2: (20 puntos)

a. Utilice límites y sumatorias de Riemann para calcular la integral.

$$\int_{-3}^{-1} (x^2 + 3)\ dx$$

b. Utilice el teorema fundamental del cálculo para calcular la integral.

Tema 3: (20 puntos)

Una región del plano está limitada por la curva $y^2 = (x-2)$ y la recta $x + y - 4 = 0$

a. Encuentre el área de la región utilizando diferenciales de área perpendiculares al eje *y*.

b. Plantee una integral para calcular el área con diferenciales de área perpendiculares al eje *x*.

Tema 4: (30 puntos)

Encuentre el volumen que se genera al rotar el área delimitada por

$$y = 2x \quad \text{y} \quad y = 8x - x^2$$

a. Alrededor de la recta $y = -2$, utilizando el método de discos o anillos.

b. Alrededor de la recta $x = 8$, utilizando el método de capas cilíndricas.

TEMA 1 (30 Pts)

a. Calcule la integral indefinida:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 5}$$

SOLUCIÓN:

Explicación	**Operatoria**
Primero realizaremos una completación de cuadrados en el denominador.	$\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 5}$ $x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 5 - 4$ $(x-2)^2 + 1$
Al realizar la completación de cuadrados procedemos a reescribir la integral indefinida.	$\int \frac{dx}{(x-2)^2 + 1}$
Ahora procederemos a realizar una sustitución para simplificar la integral.	$x - 2 = u$ $dx = du$ $\int \frac{dx}{(x-2)^2 + 1} = \int \frac{du}{u^2 + 1}$
Una vez realizada la sustitución se observaría que la integral, puede realizarse de manera directa.	$\int \frac{du}{u^2 + 1} = \tan^{-1}(u) + c$
Finalmente regresamos a la variable original.	$\tan^{-1}(u) + c = \tan^{-1}(x-2) + c$

R// $\tan^{-1}(x-2) + c$

b. Calcule la integral definida

$$\int_2^4 x^2\sqrt{x^3-4}\;dx$$

SOLUCIÓN:

Explicación	**Operatoria**
Primero procederemos a realizar una sustitución para simplificar la integral. Recordando que, al realizar un cambio de variable, no es posible usar los mismos límites de integración, porque no es la misma variable. Reescribiendo la integral tenemos que:	$\int_2^4 x^2\sqrt{x^3-4}dx$ $x^3-4=u$ $3x^2dx=du$ $x^2dx=\frac{du}{3}$ $\int \frac{1}{3}(u-4)^{1/2}du$
Como siguiente paso, debemos realizar otra sustitución para simplificar aún más la integral. Reescribiendo la integral se obtiene:	$\int \frac{1}{3}(u-4)^{1/2}du$ $u-4=w$ $du=dw$ $\int \frac{1}{3}(w)^{1/2}dw$
Al realizar la reescritura anterior, la integral se puede calcular de manera directa.	$\int \frac{1}{3}(w)^{1/2}dw=\frac{1}{3}*\frac{2}{3}(w)^{\frac{3}{2}}$
Ahora regresamos al segundo cambio de variable que realizamos.	$\frac{2}{9}(u-4)^{\frac{3}{2}}$
Como siguiente paso regresamos a la variable original, y valuamos en los límites de integración indicados.	$\frac{2}{9}(x^3-4)^{\frac{3}{2}}\Big\vert_2^4=\frac{2}{9}(4^3-4)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{9}(2^3-4)^{\frac{3}{2}}$ $=80\sqrt{5/3}-16/9\approx 101.50177$

$$\int_2^4 x^2\sqrt{x^3-4}dx \;= 80\sqrt{5/3}-16/9 \approx 101.50177$$

c. Calcule:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{\cos x}^{1}\sqrt{t^3+5t}\,dt\right]$$

SOLUCIÓN:

Explicación	**Operatoria**
Primero determinamos que podemos utilizar el segundo Teorema Fundamental del Cálculo, el cual se basa en la regla de la cadena.	$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt =$ $F\big(h(x)\big) * h'(x) - F\big(g(x)\big) * g'(x)$
Como siguiente paso, debemos realizar otra sustitución para simplificar aún más la integral.	$\frac{d}{dx}\int_{cos(x)}^{1}\sqrt{t^3+5t}dt =$ $\sqrt{1^3+5(1)} * \frac{d}{dx}(1) - \sqrt{\cos^3(x)+5(\cos(x))} * \frac{d}{dx}(\cos(x)) =$ $-\sqrt{\cos^3(x)+5(\cos(x))} * (-sen(x))=$ $sen(x) * \sqrt{\cos^3(x)+5(\cos(x))}$

R// $sen(x) * \sqrt{\cos^3(x)+5(\cos(x))}$

Universidad de San Carlos de Guatemala — **Departamento de Matemática**
Facultad de Ingeniería — **Matemática Básica 2**

TEMA 2 (20 Pts)

a. Utilice límites y sumatorias de Riemann para calcular la integral.

$$\int_{-3}^{-1} (x^2 + 3)\, dx$$

SOLUCIÓN:

Explicación	**Operatoria**
Primero debemos de determinar Δx.	$\Delta x = \frac{a-b}{n} = \frac{-1-(-3)}{n} = \frac{2}{n}$
Como siguiente paso debemos determinar el valor de x_k.	$x_k = x_o + k\Delta_x = -3 + \frac{2k}{n}$

Ahora procedemos a plantear la Sumatoria de Riemann Sn.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(9 - \frac{12k}{n} + \frac{4k^2}{n^2} + 3\right) * \frac{2}{n}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(12 - \frac{12k}{n} + \frac{4k^2}{n^2}\right) * \frac{2}{n}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{24}{n} - \frac{24k}{n^2} + \frac{8k^2}{n^3}\right)$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{24}{n}\right) + \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{24k}{n^2}\right) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{8k^2}{n^3}\right)$$

$$S_n = \frac{24}{n} \sum_{k=1}^{n} (1) - \frac{24}{n^2} \sum_{k=1}^{n} (k) + \frac{8}{n^2} \sum_{k=1}^{n} (k^2)$$

$$S_n = \frac{24}{n} n - \frac{24}{n^2} * \frac{n(n+1)}{2} + \frac{8}{n^3} * \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$S_n = 24 - \frac{12n^2}{n^2} - \frac{12n}{n^2} + \frac{4n}{3n^3} + \frac{12n^2}{3n^3} + \frac{8n^3}{3n^3}$$

$$S_n = \frac{44}{3} - \frac{8}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

Una vez obtenido el Sn, debemos de calcular su límite al infinito positivo.	$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{44}{3} - \frac{8}{n} + \frac{4}{3n^2}$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{44}{3} - \lim_{n\to+\infty} \frac{8}{n} + \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{3n^2}$ $\frac{44}{3} + 0 + 0 = \frac{44}{3}$

$$\int_{-3}^{-1} (x^2+3)dx = \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{44}{3}$$

b. Utilice el teorema fundamental del cálculo para calcular la integral.

SOLUCIÓN:

Explicación	Operatoria
En primer lugar, debemos resolver la integral.	$\int_{-3}^{-1} (x^2+3)dx = \frac{x^3}{3} + 3x \Big\vert_{-3}^{-1}$
Ahora procedemos a evaluar en los límites de integración.	$\frac{(-1)^3}{3} + 3(-1) - \left(\frac{(-3)^3}{3} + 3(-3)\right)$ $\frac{-1}{3} - 3 - (-9-9) = -\frac{10}{3} + 18 = \frac{44}{3}$

$$\int_{-3}^{-1} (x^2+3)dx = \frac{44}{3}$$

TEMA 3 (20 Pts)

Una región del plano está limitada por la curva $y^2 = (x-2)$ y la recta $x + y - 4 = 0$

a. Encuentre el área de la región utilizando diferenciales de área perpendiculares al eje *y*.

SOLUCIÓN:

<table>
<tr><th>Explicación</th><th>Operatoria</th></tr>
<tr><td>Primero llevaremos ambas ecuaciones a su forma estándar, con el fin de que sea más sencillo identificarlas.

La primera es una parábola que abre hacia la derecha y la segunda es una recta con intersecto en 4 y pendiente de menos uno.</td><td>$y^2 = (x-2)$
$y = \pm\sqrt{x-2}$

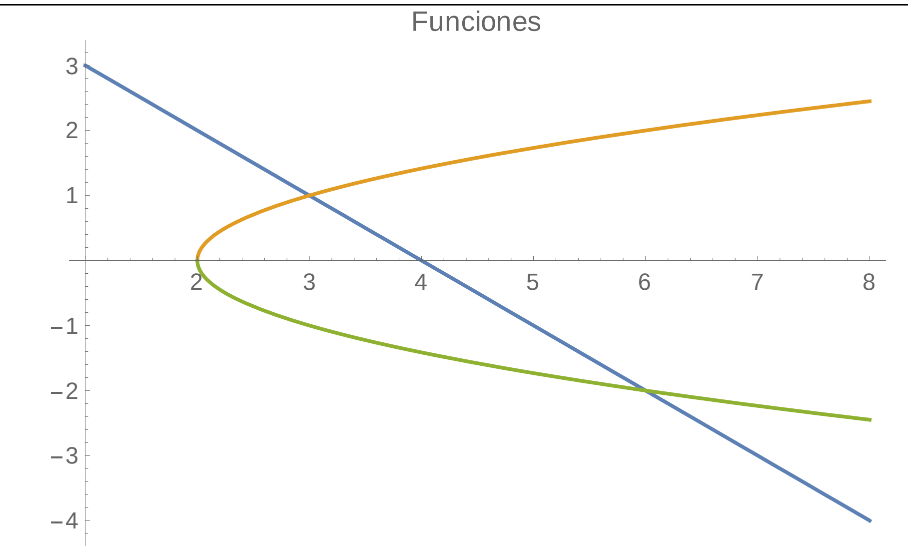
$x + y - 4 = 0$
$y = 4 - x$</td></tr>
<tr><td>Seguidamente calculamos donde se intersectan las funciones, para esto sustituiremos la x de la ecuación lineal en la ecuación cuadrática.</td><td>$y^2 = (x-2)$
$x = 4 - y$

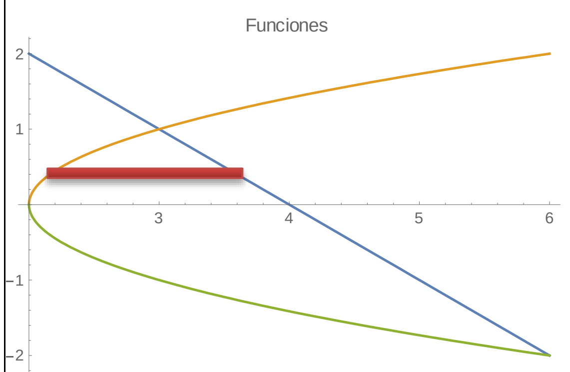
$y^2 = (4 - y - 2)$
$y^2 = 2 - y$
$y^2 + y - 2 = 0$
$(y+2)(y-1) = 0$
$y = -2$
$y = 1$

Por lo tanto;

$x = 4 - (-2) = 6$

$x = 4 - 1 = 3$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Una vez determinado dichos valores, procedemos a realizar la gráfica de las ecuaciones dadas.</td></tr>
</table>



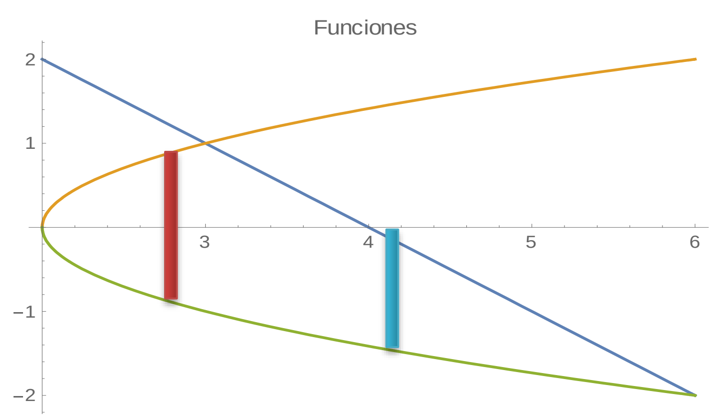
Con los datos obtenidos, procedemos a plantear el inciso a, para el cual necesitamos utilizar diferenciales de y.	
En la gráfica podemos observar que la función que está a la derecha es la recta y derecha la parábola, además de ser un dy, el cual se integrara de -2 a 1.	$$\int_{-2}^{1}\big((4-y)-(y^2+2)\big)dy$$
Simplificamos la integral antes planteada.	$$\int_{-2}^{1}(2-y-y^2)dy$$
Ahora, teniendo simplificada la integral procedemos a calcularla.	$$\int_{-2}^{1}(2-y-y^2)dy = 2y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\Big\|_{-2}^{1}$$

	$2(1)-\frac{(1)^2}{2}-\frac{(1)^3}{3}-\left(2(-2)-\frac{(-2)^2}{2}-\frac{(-2)^3}{3}\right)$ $\frac{7}{6}-\left(-\frac{10}{3}\right)=\frac{9}{2}$

$R//$ El área entre las curvas es de $9/2$ unidades cuadradas.

b. Plantee una integral para calcular el área con diferenciales de área perpendiculares al eje *x*.

En el caso de plantear diferenciales de x, se puede apreciar que existen dos casos, uno donde la gráfica de la raíz positiva está sobre la gráfica de la raíz negativa (rectángulo rojo) y el otro donde la gráfica de la recta está sobre la gráfica de la raíz negativa (rectángulo celeste). Por tal razón, es necesario plantear el área como la suma de dos integrales.



Primero determinamos las ecuaciones en función de x. Y recordamos los puntos de intersección que hemos hallado en el inciso a.	$y^2=(x-2)$ $y=\pm\sqrt{x-2}$ $x+y-4=0$ $y=4-x$

Ya con las funciones procedemos a plantear las integrales. Y finalmente realizaremos una pequeña simplificas en las integrales.	$$\int_2^3 \left(\sqrt{x-2}-(-\sqrt{x-2})\right)dx + \int_3^6 \left(4-x-(-\sqrt{x-2})\right)dx$$ $$2\int_2^3 \sqrt{x-2}dx + \int_3^6 \left(4-x+\sqrt{x-2}\right)dx$$

$$R//$$
$$2\int_2^3 \sqrt{x-2}dx + \int_3^6 \left(4-x+\sqrt{x-2}\right)dx$$

TEMA 4 (30 Pts)

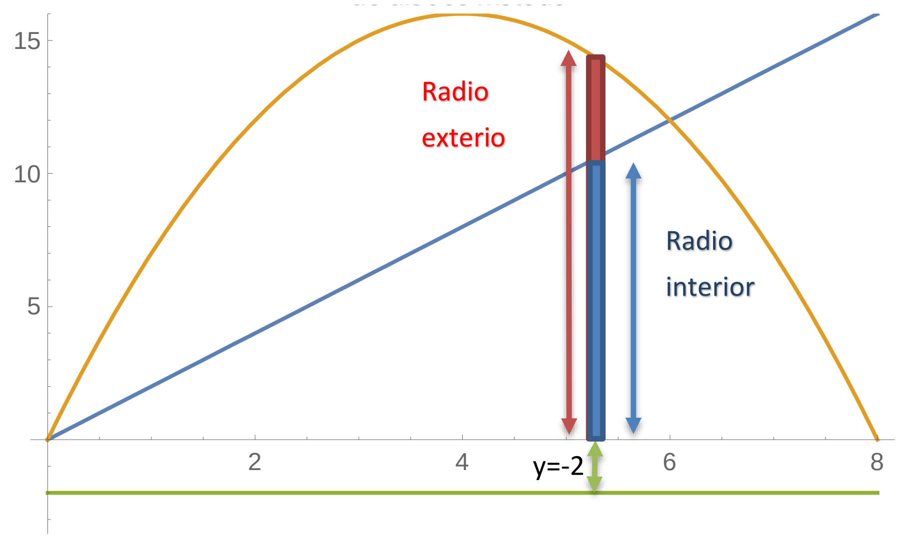
Encuentre el volumen que se genera al rotar el área delimitada por

$$y=2x \quad \text{y} \quad y=8x-x^2$$

a. Alrededor de la recta $y=-2$, utilizando el método de discos o anillos.

SOLUCIÓN:

Explicación	Operatoria
Primero determinamos los puntos de intersección entre las funciones	$y = 2x$ $y = 8x - x^2$ $2x = 8x - x^2$ $x^2 + 2x - 8x = 0$ $x^2 - 6x = 0$ $x(6-x) = 0$ $x = 0$ $x = 6$ $y = 2(0) = 0$ $y = 2(6) = 12$
Ahora procedemos a realizar la gráfica de las funciones, incluyendo y=-2. Con la gráfica podemos determinar el radio exterior y el radio interior.	



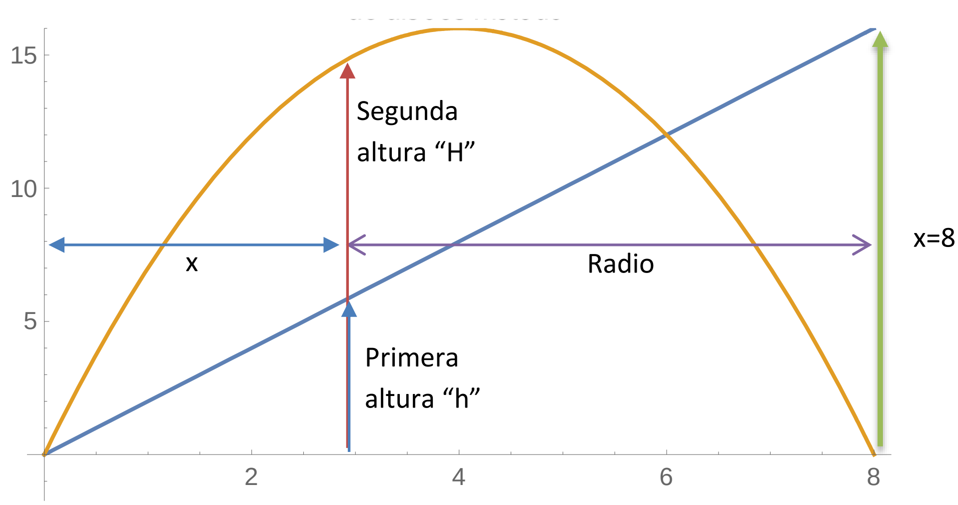
Sabemos que, para calcular el volumen por el método de anillos debemos plantear la siguiente ecuación:	$dV = \pi(R^2 - r^2)dx$
De la ecuación anterior tenemos que: R es el radio exterior y r es el radio interior. Por lo tanto la ecuación quedaría planteada de la siguiente manera.	$r = 2 + y_1 = 2 + 2x$ $R = 2 + y_2 = 2 + 8x - x^2$ $dV = \pi((2 + 8x - x^2)^2 - (2 + 2x)^2)dx$
Ahora procedemos a integrar para calcular el volumen.	$V = \int_0^6 \pi((2 + 8x - x^2)^2 - (2 + 2x)^2)dx$
Primero expandiremos los términos.	$V = \int_0^6 \pi((2 + 8x - x^2)^2 - (2 + 2x)^2)dx$ $V = \pi \int_0^6 (4 + 32x + 60x^2 - 16x^3 + x^4 - 4 - 8x - 4x^2)dx$
Una vez expandido, debemos simplificar la integral	$V = \pi \int_0^6 (24x + 56x^2 - 16x^3 + x^4)dx$
Como siguiente paso calculamos la integral definida.	$\left(\frac{24x^2}{2} + \frac{56x^3}{3} - \frac{16x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right)\pi \Big\|_0^6$

	$\left(\frac{24(6)^2}{2}+\frac{56(6)^3}{3}-\frac{16(6)^4}{4}+\frac{(6)^5}{5}\right)\pi-\left(\frac{24(0)^2}{2}+\frac{56(0)^3}{3}-\frac{16(0)^4}{4}+\frac{(0)^5}{5}\right)\pi$ $(432+4032-5184+\frac{7776}{5})\pi$ $\frac{4176}{5}\pi$

$R//$ El volumen del solido es igual a $\frac{4176}{5}\pi$ unidades cúbicas.

b. Alrededor de la recta $x=8$, utilizando el método de capas cilíndricas.

SOLUCIÓN:

<table>
<tr><th>Explicación</th><th>Operatoria</th></tr>
<tr><td colspan="2">Ahora procedemos a realizar la gráfica de las funciones, incluyendo x=8. Con la gráfica podemos determinar el radio exterior y el radio interior.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
</table>

De la gráfica anterior es posible obtener los siguientes datos.	$h = 2x$ $H = 8x - x^2$ $r = 8 - x$ $h_t = 8x - x^2 - 2x = 6x - x^2$
Sabemos que, para calcular el volumen por el método de capas cilíndricas debemos plantear la siguiente ecuación:	$dV = 2\pi r h_t dx$
De la ecuación anterior poseemos todos los datos, por lo que nos es posible plantearla.	$dV = 2\pi(8 - x)(6x - x^2)dx$
Ahora procedemos a integrar para calcular el volumen.	$V = \int_0^6 2\pi(8 - x)(6x - x^2)dx$
Primero expandiremos los términos.	$V = 2\pi \int_0^6 (48x - 8x^2 - 6x^2 + x^3)dx$
Una vez expandido, debemos simplificar la integral	$V = 2\pi \int_0^6 (48x - 14x^2 + x^3)dx$
Como siguiente paso calculamos la integral definida.	$(\frac{48x^2}{2} - \frac{14x^3}{3} + \frac{x^4}{4})2\pi \begin{cases} 6 \\ 0 \end{cases}$ $(864 - 1008 + 324)\pi$ $(180)2\pi = 360\pi$

$R//$ El volumen del solido es igual a 360π unidades cúbicas.