UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-103-4-M-1-00-2017

CURSO:	**Matemática Básica 2**
SEMESTRE:	**Primero**
CÓDIGO DEL CURSO:	**103**
TIPO DE EXAMEN:	**Examen Final**
FECHA DE EXAMEN:	**8 de mayo de 2017**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Juan Carlos Martini Palma**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Juan Carlos Martini Palma**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**
REVISÓ EL EXAMEN:	**Ing. Renato Ponciano**

Examen Final Temario A

Tema 1: (20 puntos)

Un depósito en forma de cono circular recto, con su vértice hacia arriba y su base sobre el suelo tiene un radio de 3 metros y una altura de 6 metros. Si el depósito se encuentra lleno de agua, calcule el trabajo realizado al bombear toda el agua hasta una altura de 7 metros sobre el nivel del suelo.

Tema 2: (30 puntos)

a. Calcule la derivada y simplifique la respuesta:

$$y = 25\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{5}\right) - x\sqrt{25 - x^2}$$

b. Calcule el límite:

$$\lim_{x \to 1^+}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$$

c. Calcule la longitud de arco para la curva dada en el intervalo $[1, 2]$

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$$

Tema 3: (15 puntos)

La base de un sólido es un círculo cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 4$. Encuentre el volumen del sólido si todas las secciones transversales tienen forma de cuadrado, con una de sus diagonales en la base del sólido y perpendicular al eje y.

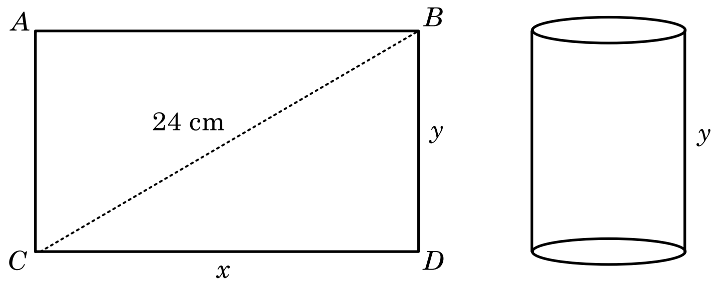
Tema 4: (15 puntos)

Encuentre las ecuaciones de las dos rectas que son tangentes comunes a las gráficas de las curvas cuyas ecuaciones son

$$y = -x^2 \quad \text{y} \quad y = x^2 + 4$$

Tema 5: (20 puntos)

Un cilindro circular recto sin tapadera, será construido al pegar los dos extremos opuestos AC y BD de una lámina rectangular que tiene una diagonal BC cuya longitud es 24 centímetros. Encuentre el volumen máximo del cilindro.



Examen Final Temario B

Tema 1: (20 puntos)

Un depósito en forma de cono circular recto, con su vértice hacia arriba y su base sobre el suelo tiene un radio de 2 metros y una altura de 4 metros. Si el depósito se encuentra lleno de agua, calcule el trabajo realizado al bombear toda el agua hasta una altura de 6 metros sobre el nivel del suelo.

Tema 2: (30 puntos)

a. Calcule la derivada y simplifique la respuesta:

$$y = 9\,\mathrm{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) - x\sqrt{9 - x^2}$$

b. Calcule el límite:

$$\lim_{x \to 1^+}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$$

c. Calcule la longitud de arco para la curva dada en el intervalo $[1, 2]$

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$$

Tema 3: (15 puntos)

La base de un sólido es un círculo cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 9$. Encuentre el volumen del sólido si todas las secciones transversales tienen forma de cuadrado, con una de sus diagonales en la base del sólido y perpendicular al eje y.

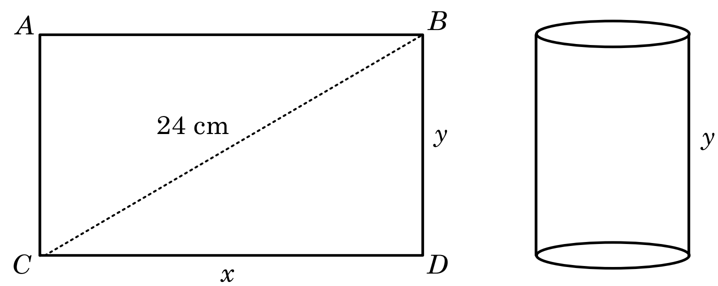
Tema 4: (15 puntos)

Encuentre las ecuaciones de las dos rectas que son tangentes comunes a las gráficas de las curvas cuyas ecuaciones son

$$y = -x^2 \quad \text{y} \quad y = x^2 + 4$$

Tema 5: (20 puntos)

Un cilindro circular recto sin tapadera, será construido al pegar los dos extremos opuestos AC y BD de una lámina rectangular que tiene una diagonal BC cuya longitud es 24 centímetros. Encuentre el volumen máximo del cilindro.



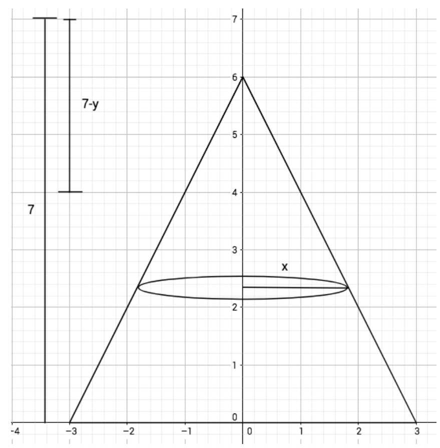
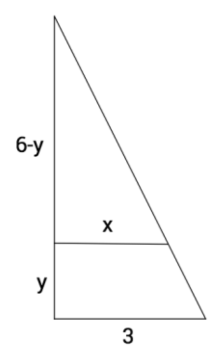
Universidad de San Carlos de Guatemala — **Departamento de Matemática**

Facultad de Ingeniería — **Matemática Básica 2**

SOLUCIÓN DEL EXAMEN
TEMARIO A

Tema 1: (20 puntos)

Un depósito en forma de cono circular recto, con su vértice hacia arriba y su base sobre el suelo tiene un radio de 2 metros y una altura de 4 metros. Si el depósito se encuentra lleno de agua, calcule el trabajo realizado al bombear toda el agua hasta una altura de 6 metros sobre el nivel del suelo.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Primero se grafica la sección transversal del tanque y se establece un sistema de referencia. El cono está compuesto por discos de radio ***x.***	
2.	Para calcular la fuerza se necesita conocer el peso del agua, que es el producto de la masa por la gravedad. La masa se puede calcular usando la densidad del agua. El volumen esta dado por el área de los discos que componen el cono multiplicado por la altura del agua ***y***, pero como esta cambia se escribe como un diferencial ***dy***. Como el agua se mueve en la dirección ***y***, se debe escribir el radio ***x*** en terminos de ***y*** por medio de triangulos semejantes.	$\rho = \frac{m}{V} = 1000\,[\frac{kg}{m^3}]$ $m = 1000^{*}V$ $dV = A_c dy = \pi x^2 dy$  $\frac{3}{x} = \frac{6}{6-y} \rightarrow x = \frac{6-y}{2}$

3.	Se calcula la fuerza necesaria para mover el agua fuera del tanque.	$dF = a * dm$ $dF = (1000^{*}\pi\left(\frac{6-y}{2}\right)^2 dy)(9.8)$
4.	La distancia que se mueve el agua es la diferencia entre 7m sobre el suelo y el lugar donde esta el agua ***y***.	$d = 7 - y$
5.	Se sustituye la masa y la distancia encontrada en la ecuación de trabajo.	$dW = (7-y)\left(9800^{*}\pi\left(\frac{6-y}{2}\right)^2\right)dy$
6.	Se integran ambos lados de la ecuacion. Como la altura del agua es de 6m; ***y*** esta restringida a $0 \leq y \leq 6$. Por lo que los limites de la integral del lado derecho son 0 y 6.	$\int_0^W dW = \int_0^6 (7-y)\left(9800^{*}\pi\left(\frac{6-y}{2}\right)^2\right)dy$ $W = 2450\pi\int_0^6 (7-y)(6-y)^2 dy$
7.	Se opera lo que esta adentro de la integral y se separa la integral.	$\int_0^6 (7-y)(6-y)^2\,dy$ $= -\int_0^6 y^3 dy$ $+\int_0^6 19y^2 dy$ $-\int_0^6 120y dy$ $+\int_0^6 252 dy$
8.	Se resuelve cada integral y se suman los resultados.	$W = 2450\pi(-324 + 1368 - 2160 + 1512)$

R./

$$W = 970200\pi\, J = 3047973.19\, J$$

Tema 2: (30 puntos)

a. Calcule la derivada y simplifique la respuesta:

$$y = 25\,\text{sen}^{-1}\left(\frac{x}{5}\right) - x\sqrt{25 - x^2}$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Como es la derivada de una suma, los terminos se pueden derivar por separado. Primero se deriva el primer termino usando la definicion de la derivada de $sen^{-1}(x)$ y la regla de la cadena.	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} sen^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} 25sen^{-1}\left(\frac{x}{5}\right) = \frac{25}{5\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}}$
2.	Se opera adentro del radical y se simplifica.	$\frac{25}{5\sqrt{\frac{25-x^2}{25}}} = \frac{25}{5\,\frac{\sqrt{25-x^2}}{5}} = \frac{25}{\sqrt{25 - x^\wedge 2}}$
3.	Luego se deriva el segundo termino usando la regla de la derivada de un producto y la regla de la cadena.	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} x\sqrt{25 - x^2} = \sqrt{25 - x^2}$ $+ x(\frac{1}{2}(25 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x))$
4.	Se simplifica la derivada operando la frección.	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} x\sqrt{25 - x^2} = \sqrt{25 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{25 - x^2}} =$ $\frac{25 - \mathrm{x}^2 - x^2}{\sqrt{25 - x^2}} = \frac{25 - 2x^2}{\sqrt{25 - x^2}}$
5.	Luego se restan la dos derivadas y se simplifica.	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(25sen^{-1}\left(\frac{x}{5}\right) - x\sqrt{25 - x^2} =$ $\frac{25}{\sqrt{25 - x^2}} - \frac{25 - 2x^2}{\sqrt{25 - x^2}} =$ $\frac{25 - 25 + 2\mathrm{x}^2}{\sqrt{25 - x^2}}$

R./

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(25sen^{-1}\left(\frac{x}{5}\right) - x\sqrt{25 - x^2} = \frac{2x^2}{\sqrt{25 - x^2}}$$

b. Calcule el límite:

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Para resolver este limite primero se opera la función.	$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln(x)}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x-1-\ln(x)}{\ln(x)(x-1)}\right)$
2.	Luego se evalúa el limite.	$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x-1-\ln(x)}{\ln(x)(x-1)}\right)=\frac{1-1-\ln(1)}{\ln(1)(1-1)}=\frac{0}{0}$ Forma Indeterminada
3.	Como el limite tiene forma indeterminada se aplica L'Hôpital al limite derivando el numerador y denominador independientemente y se vuelve a evaluar.	$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{x-1}{x}+\ln(x)}\right)=\frac{1-\frac{1}{1}}{\frac{1-1}{1}+\ln(1)}=\frac{0}{0}$ Forma Indeterminada
4.	Como el limite tiene forma indeterminada se aplica L'Hôpital al limite derivando el numerador y denominador independientemente y se vuelve a evaluar.	$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{-\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{x-(x-1)}{x\text{^}2}+\frac{1}{x}}\right)=\frac{\frac{1}{1^2}}{\frac{1-1+1}{1\text{^}2}+\frac{1}{1}}=\frac{1}{2}$

R./

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln(x)}-\frac{1}{x-1}\right)=\frac{1}{2}$$

c. Calcule la longitud de arco para la curva dada en el intervalo $[1, 2]$

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$$

No	EXPLICACION	OPERATORIA
1.	Para calcular la longitud de arco se utiliza la siguiente formula.	$\mathrm{L} = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$
2.	Primero se calcula la derivada de la función y se simplifica.	$\frac{\mathrm{d}}{dx}\left(\frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}\right) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}$ $= \frac{2x^4 - 2}{4x^2}$
3.	Se sustituye la derivada en la formula y se opera el cuadrado.	$\mathrm{L} = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{2x^4 - 2}{4x^2}\right)^2}\, dx$ $= \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{4x^8 - 8x^4 + 4}{16x^4}}\, dx$
4.	Se opera la fracción y se simplifica operando y sacando factor comun 4 al numerador.	$L = \int_1^2 \sqrt{\frac{16x^4 + 4x^8 - 8x^4 + 4}{16x^4}}\, dx$ $= \int_1^2 \sqrt{\frac{x^8 + 2x^4 + 1}{4x^4}}\, dx$
5.	Se factoriza el numerador y se opera el radical.	$L = \int_1^2 \sqrt{\frac{x^8 + 2x^4 + 1}{4x^4}}\, dx = \int_1^2 \sqrt{\frac{(x^4 + 1)^2}{4x^4}}\, dx$ $= \int_1^2 \frac{x^4 + 1}{2x^2}\, dx$ $= \int_1^2 \frac{x^2}{2}\, dx + \int_1^2 \frac{1}{2x^2}\, dx$

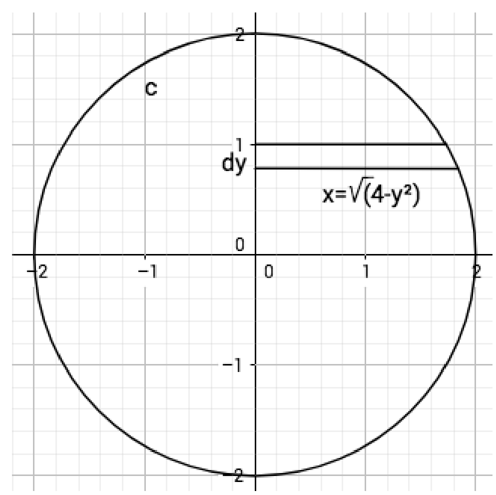
6.	Se calculan las integrales y se suman.	$L = \frac{7}{6} + \frac{1}{4} = \frac{17}{12}$

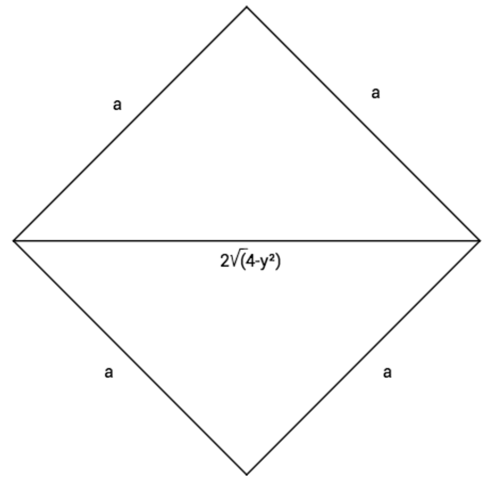
R./

$$L = \frac{17}{12}\,u = 1.42\,u$$

Tema 3: (15 puntos)

La base de un sólido es un círculo cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 4$. Encuentre el volumen del sólido si todas las secciones transversales tienen forma de cuadrado, con una de sus diagonales en la base del sólido y perpendicular al eje y.

No	EXPLICACION	OPERATORIA
1.	Primero se calcula la longitud de la diagonal de las secciones transversales.	 $\frac{l}{2} = \sqrt{4-y^2} \rightarrow l = 2\sqrt{4-y^2}$

2.	Se calculan los lados del cuadrado usando pitagoras. Los lados al cuadrado son iguales al area.	 $a^2 + a^2 = 4(4 - y^2) \rightarrow 2a^2 = 16 - 4y^2$ $a^2 = A = 8 - 2y^2$
3.	El diferencial de volumen esta dado por el area multiplicado por un diferencial de longitud. Se integran ambos lados de la ecuación para encontrar el volumen. La base del sólido esta restringida de la siguiente manera: $-2 \leq y \leq 2$	$dV = (8 - 2y^2)dy$ $\int_0^V \mathrm{dV} = \int_{-2}^{2} (8 - 2\mathrm{y}^2)dy$ $V = \left(8y - \frac{2}{3}y^3\right) \begin{matrix} 2 \\ -2 \end{matrix} = \frac{64}{3} = 21.33$

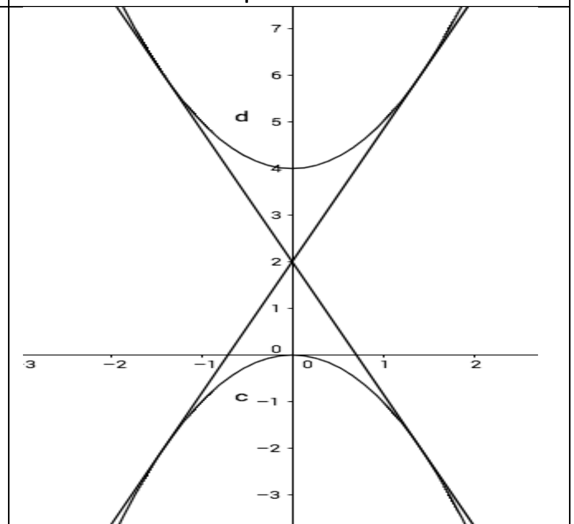
R./

$$V = \frac{64}{3}\, u^3 = 21.33\, u^3$$

Tema 4: (15 puntos)

Encuentre las ecuaciones de las dos rectas que son tangentes comunes a las gráficas de las curvas cuyas ecuaciones son

$$y = -x^2 \quad \text{y} \quad y = x^2 + 4$$

No.	Explicación	Operación
1.	En la grafica se puede observar que las rectas tienen la misma pendiente pero con signos opuestos. Esto se puede confirmar con la derivada.	
2.	La derivada de una función es la pendiente de la recta tangente, por lo que al derivar las funciones obtendremos las pendientes de la rectas.	$y_1' = \frac{d}{dx}(-x^2) = -2x \rightarrow y_1'(a) = -2a$ $y_2' = \frac{d}{dx}(x^2 + 4) = 2x \rightarrow y_2'(a) = 2a$
3.	La pendiente m_1 tambien se puede calcular usando dos puntos. Se usan los puntos de intersección $(a,\ -a^2)\ y\ (-a,\ a^2+4)$ para calcular la pendiente y se simplifica.	$\mathrm{m}_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{a^2 + 4 - (-a^2)}{-a - a}$ $= \frac{2a^2 + 4}{-2a}$
4.	La pendiente m_2 tambien se puede calcular usando dos puntos. Se usan los puntos de intersección $(-a,\ -a^2)\ y\ (a,\ a^2+4)$ para calcular la pendiente y se simplifica.	$\mathrm{m}_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{a^2 + 4 - (-a^2)}{a - (-a)}$ $= \frac{2a^2 + 4}{2a}$
5.	Se igualan las pendientes encontradas para encontrar los puntos de intersección.	$m_1 = -2a = \frac{2a^2 + 4}{-2a} \rightarrow 2a^2 - 4 = 0$ $m_2 = 2a = \frac{2a^2 + 4}{2a} \rightarrow 2a^2 - 4 = 0$ $a = \pm\sqrt{2},\ m_1 = -2\sqrt{2}, m_2 = 2\sqrt{2}$

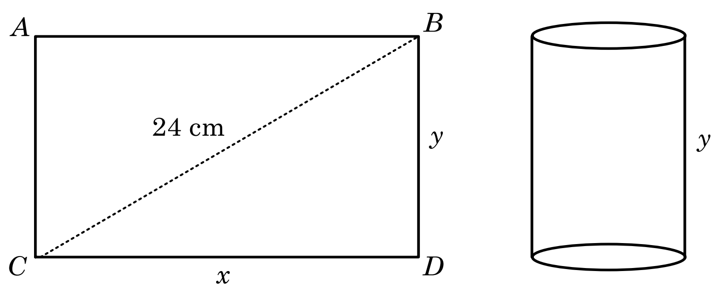
6.	Usando la ecuación punto-pendiente se encuentran las ecuaciones de las dos rectas.	$y(x) - y_1 = m(x - x_1)$ $y_1(x) - (-2) = -2\sqrt{2}(x - \sqrt{2})$ $y_2(x) - (-2) = 2\sqrt{2}(x + \sqrt{2})$

R./

$$y_1(x) = -2\sqrt{2}\,x + 2 \qquad\qquad y_1(x) = 2\sqrt{2}\,x + 2$$

Tema 5: (20 puntos)

Un cilindro circular recto sin tapadera, será construido al pegar los dos extremos opuestos AC y BD de una lámina rectangular que tiene una diagonal BC cuya longitud es 24 centímetros. Encuentre el volumen máximo del cilindro.



No.	Explicación	Operación
1.	Para calcular el volumen de un cilindro es necesario saber el radio y la altura del mismo. Al momento de construir el cilindro ***x*** se convierte en el perimetro de la base y ***y*** se convierte en la altura.	$\mathrm{V_c} = \pi r^2 h$ $\mathrm{x} = 2\pi r$ $\mathrm{y} = h$ $\mathrm{V_c} = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 y$
2.	Se escribe ***x*** en terminos de ***y*** utilizando el teorema de Pitagoras, para que el volumen dependa de solo una variable.	$\mathrm{x}^2 + y^2 = 576$ $x = \sqrt{576 - y^2}$

3.	Se sustituye ***x*** en la ecuación de volumen y se simplifica.	$\mathrm{V_c} = \pi\left(\frac{\sqrt{576-y^2}}{2\pi}\right)^2 y = \frac{576y-y^3}{4\pi}$
4.	Para encontrar los valores críticos de la ecuación, se utiliza el críterio de la primera derivada. Se utiliza la respuesta positiva	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dy}} V_c = \frac{144}{\pi} - \frac{3y^2}{4\pi} = 0$ $y^2 = \frac{576}{3}$ $y = \pm\sqrt{192}$
5.	Para comprobar que el valor encontrado es un máximo se utiliza el criterio de la segunda derivada.	$\frac{d^2}{dx^2} V_c = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{144}{\pi} - \frac{3y^2}{4\pi}\right) = 0 - \frac{6y}{4\pi} = -\frac{3y}{2\pi}$ $V_c''\left(\sqrt{192}\right) = -\frac{3\sqrt{192}}{2\pi} = -6.62$
	Como el resultado de la segunda derivada es menor que 0, V_c tiene un máximo relativo en $y = \sqrt{192}$.	$V_c''\left(\sqrt{192}\right) = -6.62 \rightarrow -6.62 < 0$ $\mathrm{V_c}\left(\sqrt{192}\right) = \frac{576\sqrt{192} - \sqrt{192}^3}{4\pi} = 423.42\ u^3$

R./

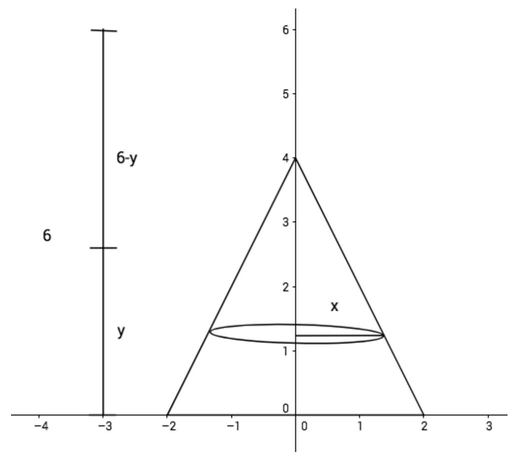
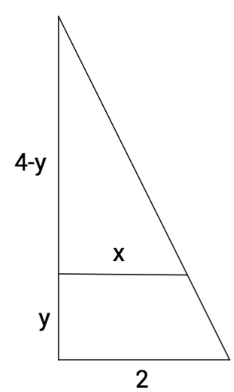
$$V_c max = 423.42\ u^3$$

Universidad de San Carlos de Guatemala | Departamento de Matemática
Facultad de Ingeniería | Matemática Básica 2

SOLUCIÓN DEL EXAMEN
TEMARIO B*
***Solo se resolverán los problemas distintos al Temario A**

Tema 1: (20 puntos)

Un depósito en forma de cono circular recto, con su vértice hacia arriba y su base sobre el suelo tiene un radio de 2 metros y una altura de 4 metros. Si el depósito se encuentra lleno de agua, calcule el trabajo realizado al bombear toda el agua hasta una altura de 6 metros sobre el nivel del suelo.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Primero se grafica la sección transversal del tanque y se establece un sistema de referencia. El cono está compuesto por discos de radio ***x.***	
2.	Para calcular la fuerza se necesita conocer el peso del agua, que es el producto de la masa por la gravedad. La masa se puede calcular usando la densidad del agua. El volumen esta dado por el área de los discos que componen el cono multiplicado por la altura del agua ***y***, pero como esta cambia se escribe como un diferencial ***dy***. . Como el agua se mueve en la dirección ***y***, se debe escribir el radio ***x*** en terminos de ***y*** por medio de triángulos semejantes	$\rho = \frac{m}{V} = 1000\ [\frac{kg}{m^3}]$ $m = 1000^{*}V$ $dV\ = A_c dy = \pi x^2 dy$  $\frac{2}{x} = \frac{4}{4-y} \rightarrow x = \frac{4-y}{2}$

3.	Se calcula la fuerza necesaria para mover el agua fuera del tanque.	$dF = a * dm$ $d\mathrm{F} = (1000^{*}\pi\left(\frac{4-y}{2}\right)^2 dy)(9.8)$
4.	La distancia que se mueve el agua es la diferencia entre 6m sobre el suelo y el lugar donde esta el agua ***y***.	$d = 6 - y$
5.	Se sustituye la masa y la distancia encontrada en la ecuación de trabajo.	$dW = (6-y)\left(9800^{*}\pi\left(\frac{4-y}{2}\right)^2\right)dy$
6.	Se integran ambos lados de la ecuacion. Como la altura del agua es de 4m; ***y*** esta restringida a $0 \leq y \leq 4$. Por lo que los limites de la integral del lado derecho son 0 y 4.	$\int_0^W dW = \int_0^4 (6-y)\left(9800^{*}\pi\left(\frac{4-y}{2}\right)^2\right)dy$ $W = 2450\pi\int_0^4 (6-y)(4-y)^2 dy$
7.	Se opera lo que esta adentro de la integral y se separa la integral.	$\int_0^4 (6-y)(4-y)^2\,dy = -\int_0^4 y^3 dy + \int_0^4 14y^2 dy - \int_0^4 64y dy + \int_0^4 96 dy$
8.	Se resuelve cada integral y se suman los resultados.	$W = 2450\pi(-64 + \frac{896}{3} - 512 + 384)$

R./

$$W = \frac{784000}{3}\pi\, J = 821002.88\, J$$

Tema 2: (30 puntos)

a. Calcule la derivada y simplifique la respuesta:

$$y = 9\,\text{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) - x\sqrt{9 - x^2}$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Como es la derivada de una suma, los terminos se pueden derivar por separado. Primero se deriva el primer termino usando la definicion de la derivada de $sen^{-1}(x)$ y la regla de la cadena.	$\frac{\text{d}}{\text{dx}} sen^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\frac{\text{d}}{\text{dx}} 9sen^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{9}{3\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}$
2.	Se opera adentro del radical y se simplifica.	$\frac{9}{3\sqrt{\frac{9-x^2}{9}}} = \frac{9}{3\,\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}} = \frac{9}{\sqrt{9-x\text{^}2}}$
3.	Luego se deriva el segundo termino usando la regla de la derivada de un producto y la regla de la cadena.	$\frac{\text{d}}{\text{dx}} x\sqrt{9-x^2} = 9 + x(\frac{1}{2}(9-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x))$
4.	Se simplifica la derivada operando la frecci\u00f3n.	$\frac{\text{d}}{\text{dx}} x\sqrt{25-x^2} = \sqrt{9-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} =$ $\frac{9-\text{x}^2-x^2}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{9-2x^2}{\sqrt{9-x^2}}$
5.	Luego se restan la dos derivadas y se simplifica.	$\frac{\text{d}}{\text{dx}}(9sen^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) - x\sqrt{9-x^2} =$ $\frac{9}{\sqrt{9-x^2}} - \frac{9-2x^2}{\sqrt{9-x^2}} =$ $\frac{9-9+2\text{x}^2}{\sqrt{9-x^2}}$

R./

$$\frac{\text{d}}{\text{dx}}(9sen^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) - x\sqrt{9-x^2} = \frac{2x^2}{\sqrt{9-x^2}}$$

b. Calcule el límite:

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$$

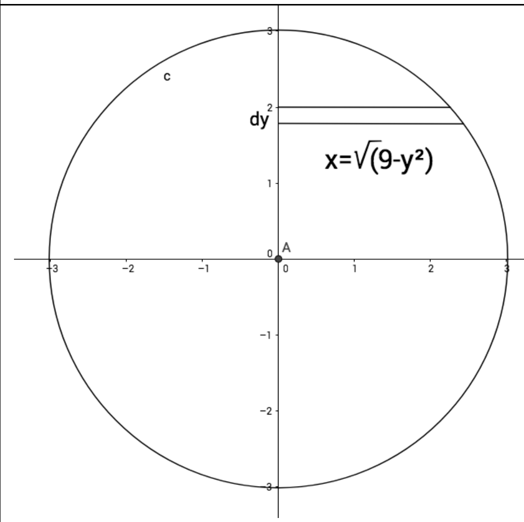
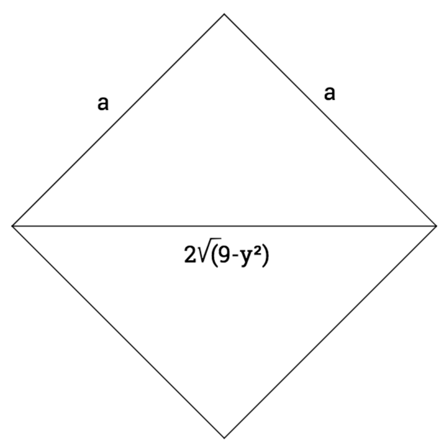
No.	Explicación	Operatoria
1.	Para resolver este limite primero se opera la función.	$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln(x)}\right)=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\ln(x)-(x-1)}{\ln(x)(x-1)}\right)$
2.	Luego se evalúa el limite.	$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\ln(x)-x+1}{\ln(x)(x-1)}\right)=\frac{\ln(1)-1+1}{\ln(1)(1-1)}=\frac{0}{0}$ Forma Indeterminada
3.	Como el limite tiene forma indeterminada se aplica L'Hôpital al limite derivando el numerador y denominador independientemente y se vuelve a evaluar.	$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{x-1}{x}+\ln(x)}\right)=\frac{\frac{1}{1}-1}{\frac{1-1}{1}+\ln(1)}=\frac{0}{0}$ Forma Indeterminada
4.	Como el limite tiene forma indeterminada se aplica L'Hôpital al limite derivando el numerador y denominador independientemente y se vuelve a evaluar.	$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{x-(x-1)}{x\text{^}2}+\frac{1}{x}}\right)=\frac{-\frac{1}{1^2}}{\frac{1-1+1}{1\text{^}2}+\frac{1}{1}}=-\frac{1}{2}$

R./

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln(x)}-\frac{1}{x-1}\right)=-\frac{1}{2}$$

Tema 3: (15 puntos)

La base de un sólido es un círculo cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 9$. Encuentre el volumen del sólido si todas las secciones transversales tienen forma de cuadrado, con una de sus diagonales en la base del sólido y perpendicular al eje y.

No	EXPLICACION	OPERATORIA
1.	Primero se calcula la longitud de la diagonal de las secciones transversales.	 $\frac{l}{2} = \sqrt{9 - y^2} \rightarrow l = 2\sqrt{9 - y^2}$
2.	Se calculan los lados del cuadrado usando pitagoras. Los lados al cuadrado son iguales al area.	 $a^2 + a^2 = 4(9 - y^2)$ $2a^2 = 36 - 4y^2$ $a^2 = A = 18 - 2y^2$

3.	El diferencial de volumen esta dado por el area multiplicado por un diferencial de longitud. Se integran ambos lados de la ecuación para encontrar el volumen. La base del sólido esta restringida de la siguiente manera: $-3 \leq y \leq 3$.	$dV = (18 - 2y^2)dy$ $\int_0^V \mathrm{dV} = \int_{-3}^{3} (18 - 2\mathrm{y}^2)dy$ $V = \left(18y - \frac{2}{3}y^3\right)\begin{matrix} 3 \\ -3 \end{matrix} = 72\, u^3$

R./

$$V = 72\, u^3$$