UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-103-5-M-1-00-2017

CURSO:	**Matemática Básica 2**
SEMESTRE:	**Primero**
CÓDIGO DEL CURSO:	**103**
TIPO DE EXAMEN:	**Primera Retrasada**
FECHA DE EXAMEN:	**22 de mayo de 2017**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Juan Carlos Martini Palma**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Juan Carlos Martini Palma**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**
REVISÓ EL EXAMEN:	**Ing. Renato Ponciano**

Temario W

Tema 1: (20 puntos)

a. Calcule el límite

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^3-8}{x^2-4}\right)$$

b. Calcule la integral definida

$$\int_0^2 |2x-1|\,dx$$

c. Calcule $\frac{dy}{dx}$

$$y=\sqrt{3x+\sqrt{2x}}$$

Tema 2: (20 puntos)

Encuentre el volumen del cono circular recto más grande que puede inscribirse en una esfera de radio 4 cm.

Tema 3 (20 puntos)

Encuentre el volumen que se genera al girar el área delimitada por $y=|x|$ & $y=x^2-2$ alrededor de $y=-4$

Tema 4 (20 puntos)

Un tanque tiene la forma de la mitad inferior de una esfera de 4 metros de diámetro y se encuentra lleno de agua. Encuentre el trabajo realizado para bombear el agua hasta tres metros por encima de la parte superior del tanque.

Tema 5 (20 puntos)

Dos barcos parten de un mismo punto y al mismo tiempo, el primero se dirige al norte a 20 km/h y el segundo se dirige al este a 30 km/h. ¿Cómo varia la distancia entre ellos tres horas después de haber partido?

Universidad de San Carlos de Guatemala — **Departamento de Matemática**
Facultad de Ingeniería — **Matemática Básica 2**

SOLUCIÓN DEL EXAMEN
TEMARIO A

Tema 1: (20 puntos)

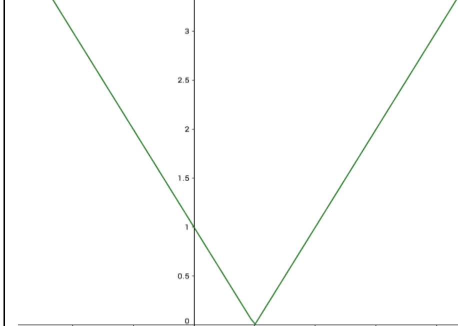
a. Calcule el límite

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^3-8}{x^2-4}\right)$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Primero se evalua el limite y se demuestra que tiene forma indeterminada.	$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^3-8}{x^2-4}\right)=\frac{2^3-8}{2^2-4}=\frac{0}{0}$ Forma indeterminada
2.	Como el limite tiene forma indeterminada se aplica L'Hôpital al limite derivando el numerador y denominador independientemente y se vuelve a evaluar.	$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^3-8}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{3x^2}{2x}\right)=\frac{12}{4}$
R./ $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^3-8}{x^2-4}\right)=3$		

b. Calcule la integral definida

$$\int_0^2 |2x-1|\,dx$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Al graficar la función se puede observar que que esta compuesta de dos rectas oblicuas que se intersectan en (0.5,0). Por las propiedades del valor absoluto se sabe que una recta es la función y la otra recta es el negativo de la función.	$f(x)=\lvert 2x-1\rvert$ 

2.	La función tambien se puede escribir como una función definida a trozos.	$\|2x-1\| = \begin{cases} -2x+1, & x < 0.5 \\ 2x-1, & x \geq 0.5 \end{cases}$
3.	La integral ahora se puede separar en dos integrales simples.	$\int_0^2 \|2x-1\|\,dx = \int_0^{0.5} (-2x+1)dx + \int_{0.5}^2 (2x-1)dx$
4.	Se resuelven las integrales y se suman.	$\int_0^{0.5} (-2x+1)dx + \int_{0.5}^2 (2x-1)dx =$ $\frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2.5$

R./

$$\int_0^2 |2x-1|\,dx = 2.5$$

c. Calcule $\frac{dy}{dx}$

$$y = \sqrt{3x + \sqrt{2x}}$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Para calcular esta derivada se debe utilizar la regla de la cadena. Primero se sustituye la expresión que esta dentro del radical para simplificar el calculo.	$f(x) = \sqrt{3\mathrm{x} + \sqrt{2x}}$ $U = 3x + \sqrt{2x}$ $f(x) = \sqrt{U}$
2.	Se deriva la nueva expresión.	$\frac{d}{dx}\sqrt{U} = \frac{1}{2\sqrt{U}} \cdot \frac{d}{dx}U$

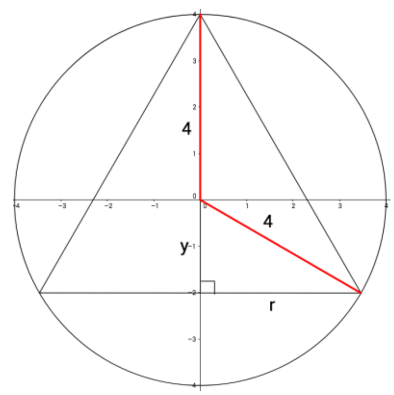
3.	Se calcula la derivada de U usando el teorema de la derivada de una suma y la regla de la cadena.	$\frac{d}{dx}U = \frac{d}{dx}\left(3x + \sqrt{2x}\right) =$ $\frac{d}{dx}U = 3 + \frac{2}{2\sqrt{2x}} = 3 + \frac{1}{\sqrt{2x}}$
4.	Se sustituyen U y su derivada en la expresión anterior y se simplifica.	$\frac{d}{dx}\sqrt{U} = \frac{1}{2\sqrt{U}} \cdot \frac{d}{dx}U =$ $\frac{d}{dx}\sqrt{3\mathrm{x} + \sqrt{2x}} = \frac{1}{2\sqrt{3x + \sqrt{2x}}}\left(3 + \frac{1}{\sqrt{2x}}\right)$ $= \frac{3 + \frac{1}{\sqrt{2x}}}{2\sqrt{3x + \sqrt{2x}}} = \frac{\frac{3\sqrt{2x}+1}{\sqrt{2x}}}{2\sqrt{3x + \sqrt{2x}}}$ $= \frac{3\sqrt{2x} + 1}{2\sqrt{2x}\sqrt{3x + \sqrt{2x}}}$

R./

$$\frac{d}{dx}\sqrt{3\mathrm{x} + \sqrt{2x}} = \frac{3\sqrt{2x} + 1}{2\sqrt{6x^2 + 2x}}$$

Tema 2: (20 puntos)

Encuentre el volumen del cono circular recto más grande que puede inscribirse en una esfera de radio 4 cm.

No	EXPLICACION	OPERATORIA
1.	Primero se define la función a optimizar, esta seria el volumen del cono. Como el volumen del cono depende de dos variables no se puede aplicar el criterio de la primera derivada.	$\mathrm{V_c}(r,h) = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$
2.	Se debe escribir una variable en terminos de la otra para poder aplicar el criterio. Se dibuja la sección transversal de la esfera para visualizar la relación entre variables. En la figura se puede observar que ***r*** y ***h*** están relacionadas por medio de triangulos rectangulos y se usa la variable auxiliar ***y*** para realizar los calculos.	
3.	Usando el teorema de pitagoras ***y*** se puede escribir en terminos de ***r*** para luego sustituir en ***h***.	$h = 4 + y$ $y^2 + r^2 = 16 \to r^2 = 16 - y^2$
4.	Se sustituye ***h*** en la ecuación de volumen.	$V_c(y) = \dfrac{\pi(16 - y^2)(4 + y)}{3}$ $V_c(y) = \dfrac{\pi(64 + 16y - 4y^2 - y^3)}{3}$
5.	Se calculan las derivadas utilizando la regla de la cadena.	$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}} V_c(r) = \dfrac{d}{dr} \dfrac{\pi(-y^3 - 4y^2 + 16y + 64)}{3}$ $= \left(\dfrac{\pi}{3}\right)(-3y^2 - 8y + 16)$

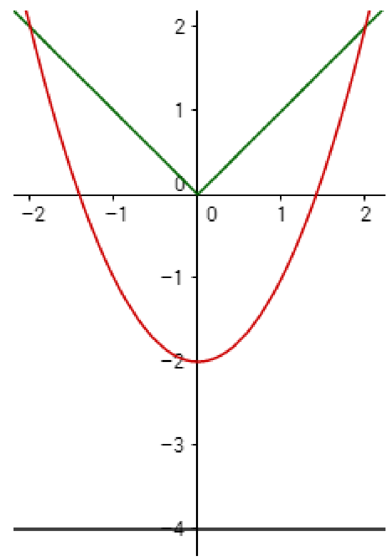
7.	La primera derivada se iguala a 0 para encontrar los valores críticos de la función.	$\left(\frac{\pi}{3}\right)(-3y^2 - 8y + 16) = 0$ $-3y^2 - 8y + 16 = 0$ $y_1 = \frac{4}{3}\ ; y_2 = -4$
8.	Se escoge el valor positivo ya que el volumen está restringido por $V_c \geq 0$. Luego se calculan las dimensiones del cono.	$h = 4 + y = 4 + \frac{4}{3} = \frac{19}{3} \approx 6.33$ $r = \sqrt{16 - y^2} = \sqrt{16 - \frac{16}{9}} = \frac{8\sqrt{2}}{3} \approx 3.771$ $V_{max} = V_c(1.33) = 79.43cm^3$

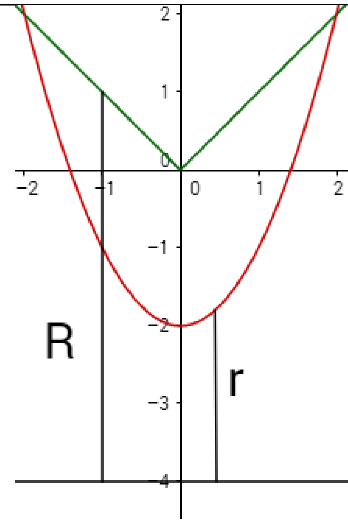
R./

$$r_c = 3.771\ cm\ ; h_c = 6.333\ cm$$

Tema 3 (20 puntos)

Encuentre el volumen que se genera al girar el área delimitada por $y = |x|$ & $y = x^2 - 2$ alrededor de $y = -4$

No	EXPLICACION	OPERATORIA
1.	En la gráfica se puede observar el área transversal del sólido y el eje sobre el cual va a girar.	
2.	Se igualan las funciones para encontrar los puntos de intersección de las curvas para determinar los límites de integración. El valor absoluto se puede escribir como una función a trazos para facilitar el cálculo.	$\lvert x\rvert = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ $x = x^2 - 2 \rightarrow x = 2$ $-x = x^2 - 2 \rightarrow x = -2$
3.	Se calcula el área de las arandelas, que está dada por la resta del radio mayor menos el radio menor.	$A = \pi(R^2 - r^2)$

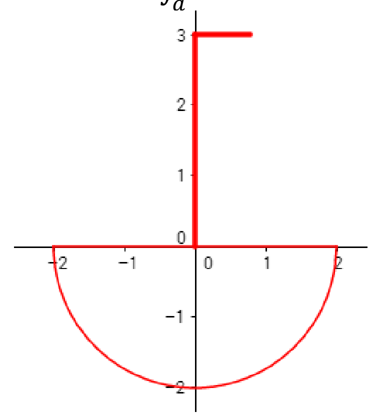
		 $R = x + 4$ $r = (x^2 - 2) + 4$ $A = \pi((x+4)^2 - (x^2+2)^2)$
4.	El volumen está dado por la suma de todas las roldanas, que se expresa como una integral definida. Porque el sólido es simétrico se calcula la integral de 0 a 2 y se multiplica por 2.	$V = \int_a^b A(x)dx$ $V = 2\int_0^2 \pi((x+4)^2 - (x^2+2)^2)dx$
5.	Se expanden los términos de la integral y se operan los términos semejantes.	$V = 2\pi \int_0^2 \big(x^2 + 8x + 16 - (x^4 + 4x^2 + 4)\big)dx$ $= 2\pi \int_0^2 (-x^4 - 3x^2 + 8x + 12)dx$
6.	Se separa la integral y se resuelve cada una.	$V = 2\pi\left[-\int_0^2 x^4 dx - \int_0^2 3x^2 dx + \int_0^2 8x dx + \int_0^2 12 dx\right]$ $V = 2\pi\left[-\frac{32}{5} - 8 + 16 + 24\right]$ $V = \frac{256\pi}{5}u^3 = 160.85\, u^3$

R./

$$V = \frac{256\pi}{5}\, u^3 = 160.85\, u^3$$

Tema 4 (20 puntos)

Un tanque tiene la forma de la mitad inferior de una esfera de 4 metros de diámetro y se encuentra lleno de agua. Encuentre el trabajo realizado para bombear el agua hasta tres metros por encima de la parte superior del tanque.

<table>
<tr><th>No.</th><th>Explicación</th><th>Operación</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>El trabajo realizado por la bomba está dada por la integral de trabajo.
La grafica de la sección transversal del tanque es un semicírculo de radio 2. El tanque está compuesto por círculos.</td><td>$$W = \int_a^b F(x)dx$$


$$f(x) = -\sqrt{4-x^2}$$</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Para calcular la fuerza se necesita conocer la masa y la aceleración del agua. El diferencial de masa se calcula usando la densidad del agua y la aceleración es igual a la gravedad.</td><td>$$\rho = \frac{m}{V} = 1000\left[\frac{kg}{m^3}\right]$$
$$dm = 1000^* dV$$
$$dV = A_c dy = \pi r^2 dy$$</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Para calcular el área de los círculos que componen el tanque se debe conocer x que es el radio de los círculos.</td><td>$$y = -\sqrt{4-x^2} \rightarrow x = -\sqrt{4-y^2}$$
$$A_c = \pi\left(-\sqrt{4-y^2}\right)^2 = \pi(4-y^2)$$</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Se calcula el diferencial de fuerza necesaria para mover el agua fuera del tanque.</td><td>$$dF = a\,dm = 1000\pi(4-y^2)(9.8)dy$$</td></tr>
</table>

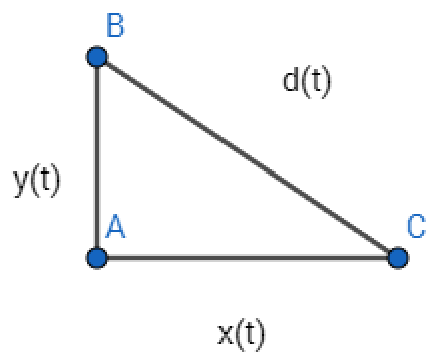
5.	La distancia que se mueve el agua es la diferencia entre 3m sobre la superficie y el lugar donde está el agua ***y***.	$d = 3 - y$
6.	Se sustituye la masa y la distancia encontrada en la ecuación de trabajo.	$dW = (3-y)\left(9800^{*}\pi(4-y^2)\right)dy$
7.	Se integran ambos lados de la expresión, lo límites de la integral del lado derecho son de -2 a 0, porque ahí es donde existe el agua.	$\int_0^W dW = 9800\pi\int_{-2}^{0}[(3-y)(4-y^2)]dy$
8.	Se expande el término a integrar y se separa la integral.	$\int_{-2}^{0}(12-3y^2-4y+y^3)dy$ $= \int_{-2}^{0}12dy - \int_{-2}^{0}3y^2\,dy - \int_{-2}^{0}4y\,dy + \int_{-2}^{0}y^3\,dy$
9.	Se resuelve cada integral y se suman los resultados.	$W = 9800\pi(24-8+8-4) = 196000\pi$

R./

$$W = 196000\pi\ J = 615{,}752.16\ \ J$$

Tema 5 (20 puntos)

Dos barcos parten de un mismo punto y al mismo tiempo, el primero se dirige al norte a 20 km/h y el segundo se dirige al este a 30 km/h. ¿Cómo varia la distancia entre ellos tres horas después de haber partido?

No.	Explicación	Operación
1.	Se dibuja el problema, donde $x(t)$ es la distancia que recorre el barco que va al este; $y(t)$ la distancia del que va al norte y $d(t)$ es la distancia entre los barcos.	
2.	Se sabe que la distancia es el producto de la velocidad por el tiempo, por lo que se definen $x(t)$ y $y(t)$.	$x(t) = 30t$ $y(t) = 20t$
3.	Como un braco va hacia el Este y el otro hacia el Norte se sabe que hay 90° entre las trayectorias por lo que se forma un triángulo rectángulo. Se puede calcular $d(t)$ utilizando el teorema de Pitágoras.	$d(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = \sqrt{(30t)^2 + (20t)^2}$
4.	La razón de cambio instantánea es la primera derivada de la velocidad, por lo que se debe calcular $\frac{d}{dx}d(t)$.	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dy}}d(t) = \frac{1800t + 800t}{2\sqrt{900t^2 + 400t^2}}$
5.	Se valúa la derivada en t=3.	$d'(t) = \frac{1800 * 3 + 800 * 3}{2\sqrt{(900)(3)^2 + (400)(3)^2}} = 36.06\ km$

R./

$$d'(3) = 36.06km$$