UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-103-6-M-2-00-2017

CURSO:	**Matemática Básica 2**
SEMESTRE:	**Segundo**
CÓDIGO DEL CURSO:	**103**
TIPO DE EXAMEN:	**Segunda Retrasada**
FECHA DE EXAMEN:	**10 de enero de 2018**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Juan Carlos Martini Palma**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Juan Carlos Martini Palma**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**
REVISÓ EL EXAMEN:	

Examen de segunda retrasada

Temario A

Tema 1: (20 puntos)

a. Utilice el método de Newton para encontrar la raíz ente 1 y 2, con tres decimales exactos para la ecuación dada $\ln x = (x-2)^2$

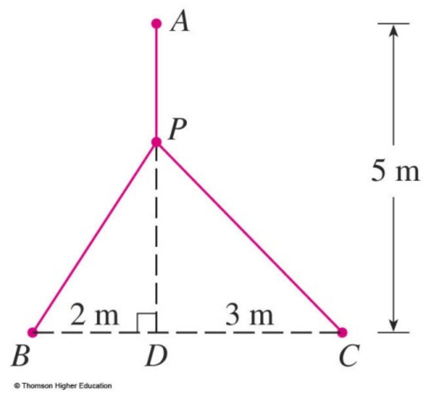
b. Calcule el límite $\lim_{x \to \infty} x^3 e^{-x}$

Tema 2: (20 puntos)

El cateto de un triángulo rectángulo mide 12 centímetros. Calcule la razón a la cual aumenta el área del triángulo en el instante en el cual el ángulo adyacente mide 30 grados y aumenta a razón de 2 grados por minuto.

Tema 3: (20 puntos)

Sea x la distancia del punto P al punto D. Determine el valor de x de tal manera que la longitud total del cable que un e al punto P, con los puntos A, B y C sea mínima.



Tema 4: (20 puntos)

Un depósito para almacenar agua tiene la forma de una caja rectangular con base cuadrada de 2 metros por lado y una altura de 3 metros. Si el depósito se encuentra lleno de agua, calcule el trabajo realizado al bombear la mitad del agua en el depósito 2 metros por encima del mismo.

Tema 5: (20 puntos)

La base de un sólido es la región del plano limitada por las rectas $x+2y=6$, $x-2y=6$ y $x=0$. Determine el volumen del sólido si todas las secciones planas perpendiculares al eje x son semicírculos con su diámetro en la base del sólido.

SOLUCIÓN DEL EXAMEN
TEMARIO A

Tema 1: (20 puntos)

a. Utilice el método de Newton para encontrar la raíz ente 1 y 2, con tres decimales exactos para la ecuación dada

$$\ln x = (x-2)^2$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Primero se debe encontrar f(x) y se calcula la derivada.	$f(x) = \ln(x) - (x-2)^2$ $f'(x) = \frac{1}{x} - 2(x-2)$
2.	Se sustituyen los valores en la fórmula del método de Newton. Se empieza con x=0.5	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ $x_1 = 0.5 - \frac{\ln(0.5) - (0.5-2)^2}{0.5^{-1} - 2(0.5-2)}$ $x_1 = 1.089$
3.	Se sigue iterando hasta encontrar la raiz.	$x_2 = 1.361$ $x_3 = 1.411$ $x_4 = 1.412$ $x_5 = 1.412$

R./

$$x = 1.412$$

b. Calcule el límite $\lim_{x \to \infty} x^3 e^{-x}$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Primero se simplifica el limite para evaluarlo.	$\lim_{x\to\infty} x^3 e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$ $Forma\ Indeterminada$

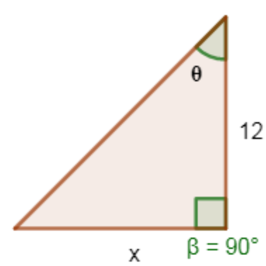
2.	Como el limite tiene una forma indeterminada se aplica L'Hôpital.	$L'H => \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$ $L'H => \lim_{x\to\infty} \frac{6x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$ $L'H => \lim_{x\to\infty} \frac{6}{e^x} = 0$

R./

$$\lim_{x\to\infty} x^3 e^{-x} = 0$$

Tema 2: (20 puntos)

El cateto de un triángulo rectángulo mide 12 centímetros. Calcule la razón a la cual aumenta el área del triángulo en el instante en el cual el ángulo adyacente mide 30 grados y aumenta a razón de 2 grados por minuto.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Primero se debe encontrar el área en términos del angulo.	 $h = \sqrt{12^2 + x^2}$ $A = \frac{12 * h}{2} \sin\theta = 6\sin\theta\sqrt{12^2 + x^2}$
2.	Se utiliza la tangente para encontrar la relación entre x y theta.	$\tan\theta = \frac{x}{12} => x = 12\tan\theta$ $A = 6\sin\theta\sqrt{144 + (12\tan\theta)^2}$ $A = 6\sin\theta\sqrt{144(1 + \tan^2\theta)}$ $A = 72\sin\theta\sqrt{\sec^2\theta}$

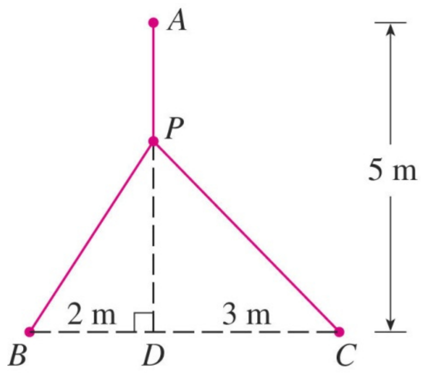
		$A = 72\tan\theta$
3.	Se deriva la expresión del área y se evalúa.	$\frac{dA}{dt} = 72\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt}$ $\theta = 30°, \frac{d\theta}{dt} = 2 * \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{90}$ $\frac{dA}{dt}_{\mid\theta=30^\circ} = \frac{\pi}{90} * 72\sec^2(30) = \frac{16\pi}{15}\frac{cm^2}{m}$

R./

$$\frac{dA}{dt}_{\mid\theta=30^\circ} = \frac{16\pi}{15}\frac{cm^2}{m}$$

Tema 3: (20 puntos)

Sea x la distancia del punto P al punto D. Determine el valor de x de tal manera que la longitud total del cable que un e al punto P, con los puntos A, B y C sea mínima.



No	EXPLICACION	OPERATORIA
1.	Primero se debe encontrar la ecuación de longitud del lazo. Se puede observar que las distancias BP y CP son las	$d_{BP} = \sqrt{x^2+2^2}$ $d_{CP} = \sqrt{x^2+3^2}$ $d_{AP} = 5 - x$

	hipotenusas de los triángulos rectángulos.	
2.	La longitud del cable es la suma de todas las distancias.	$L = d_{BP} + d_{CP} + d_{AP}$ $L(x) = \sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2+9} + 5 - x$
3.	Se deriva la expresión de longitud y se iguala a 0.	$L'(x) = \frac{1}{2}(x^2+4)^{-\frac{1}{2}}(2x)$ $+\frac{1}{2}(x^2+9)^{-\frac{1}{2}}(2x) + 5 - x$ $L'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - 1 = 0$
4.	Se resuelve la ecuacion y se encuentra la longitud del cable.	$\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - 1 = 0$ $x \approx 1.407$ $L(1.407) = 9.35m$

R./

$$x = 1.407$$

Tema 4: (20 puntos)

Un depósito para almacenar agua tiene la forma de una caja rectangular con base cuadrada de 2 metros por lado y una altura de 3 metros. Si el depósito se encuentra lleno de agua, calcule el trabajo realizado al bombear la mitad del agua en el depósito 2 metros por encima del mismo.

No	EXPLICACION	OPERATORIA

1.	Primero se debe encontrar el diferencial de volumen.	$dV = Ady = 4dy$
2.	La altura que se debe bombear el agua es la diferencia entre 2 metros por encima de la pileta y donde se encuentra el agua.	$h = 5 - y$
3.	El diferencial de trabajo esta dado por la multiplicacion del peso especifico del agua por la altura por el difernecial de volumen.	$dW = \gamma * h * dV$ $dW = 9800 * (5 - y) * 4dy$
4.	Se integran ambos lados de la ecuacion y se resuelven las integrales. La integral esta limitada por donde se encuentra el agua.	$\int_0^W dW = 9800 \int_{1.5}^{3} 4(5 - y)dy$ $39200 \left[5y - \frac{1}{2}y^2\right]_{1.5}^{3} = 161700J$

R./

$$W = 161700\ J$$

Tema 5: (20 puntos)

La base de un sólido es la región del plano limitada por las rectas $x + 2y = 6$, $x - 2y = 6$ y $x = 0$. Determine el volumen del sólido si todas las secciones planas perpendiculares al eje x son semicírculos con su diámetro en la base del sólido.

No.	Explicación	Operación
1.	El volumen esta dado por la siguiente ecuacion.	$V = \pi \int_a^b (r(x))^2$

2.	El radio esta dado por las ecuaciones de la recta. Como el area transversal son semicirculos solo se toma la mitad del volumen.	$V = \frac{\pi}{2}\int_0^3 (6-2y)^2 dy$
3.	Se resuelve la integral.	$V = \frac{\pi}{2}\int_0^3 (4y^2 - 24y + 36)dy$ $= \frac{\pi}{2}\left[\frac{4}{3}y^3 - 12y^2 + 36y\right]\begin{matrix}3\\0\end{matrix}$ $V = 18\pi\ u^3$

R./

$$V = 18\pi\ u^3$$