UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-107-1-M-01-CV-06-2017

CURSO:	**Matemática Intermedia 1**
SEMESTRE:	**Junio**
CÓDIGO DEL CURSO:	**107**
TIPO DE EXAMEN:	**Primer examen parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**Vacaciones de junio 2017**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Hilda Nelly Tórtola Morales**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Hilda Nelly Tórtola Morales**
COORDINADOR:	**Ing. Vera Marroquín**

Universidad de San Carlos
Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemática

Matemática Intermedia 1
Mat.José Carlos Bonilla
Vacaciones: junio 2017

PRIMER EXAMEN PARCIAL

---

1 Identidades matriciales (10 pts.)

Sean A, B dos matrices cuadradas del mismo tamaño, y sea I la matriz identidad del tamaño correspondiente al de las matrices anteriores. Determine si las siguientes identidades son válidas, justificando su respuesta. (5 pts. c/u)

a) $A^6 - A^4 - 2A^2 - I = (A^3 - A^2 - I)(A^3 + A^2 + I)$

b) $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$

2 Número de soluciones de un sistema (20 pts.)

¿Qué valores debe tener k en el siguiente sistema de ecuaciones para que dicho sistema posea: solución única, infinitas soluciones o ninguna solución?

$$\begin{cases} 2kx + 9y = 18 \\ 12x + 6ky = 4k^2 \end{cases}$$

3 Solución de un sistema mediante matriz inversa (20 pts.)

Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$x+2y=4$$
$$-3x+y+2z=1$$
$$4y+z=-2$$

a) Plantee el sistema en forma matricial $\mathbf{A}X = B$, y como matriz aumentada. (5 pts.)

b) Calcule la inversa de la matriz $\mathbf{A}$, empleando la matriz de cofactores. (10 pts.)

c) Halle la solución X usando la inversa, explique su procedimiento. (5 pts.)

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

TEMA 1 (10 puntos):

	Explicación	**Operatoria**
A.	Se procede a expandir el término de la derecha y restar los términos semejantes, lo cual da como resultado la cuarta línea, se sabe que la identidad al cuadrado sigue siendo la identidad y una matriz multiplicada por la identidad es esa misma matriz, por lo cual la identidad es válida, dado que es igual de ambos lados.	$A^6 - A^4 - 2A^2 - I = (A^3 - A^2 - I)(A^3 + A^2 + I)$ $A^6 - A^4 - 2A^2 - I =$ $A^6 + A^5 + A^3I - A^5 - A^4 - A^2I - A^3I - A^2I - I^2$ $-2A^2 - I = -2A^2I - I^2$ $\boxed{-2A^2 - I = -2A^2 - I}$ Si es válida porque es igual de ambos lados.
B.	Como en el inciso anterior, se procede a desarrollar la parte derecha y a restar los términos semejantes hasta determinar que la igualdad es correcta.	$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$ $A^3 + A^2B + AB^2 - A^2B - AB^2 - B^3$ $\boxed{A^3 - B^3 = A^3 - B^3}$ Si es válida porque es igual de ambos lados.

TEMA 2 (20 puntos):

	Explicación	**Operatoria**
A.	Se debe encontrar el determinante debido a que se sabe que cuando este es 0 entonces no existe solución única, luego de determinarlo se iguala a 0 y se encuentra la solución para k, como hay 2 valores, estos pueden ser para infinitas soluciones o para ninguna solución se realiza la prueba y se obtuvo que cuando k es 3 existen infinitas soluciones, cuando k es -3 ninguna solución.	$L = \begin{bmatrix} 2k & 9 \\ 12 & 6k \end{bmatrix}$ $\det(l) = (2k)(6k) - (12)(9) = 12k^2 - 108$ $0 = 12k^2 - 108$ $k = \mp 3$ Para k=3 $\left[\begin{array}{cc:c} 6 & 9 & 18 \\ 12 & 18 & 36 \end{array}\right] 2f1 - f2 \quad \left[\begin{array}{cc:c} 6 & 9 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ Para k=3 $\left[\begin{array}{cc:c} -6 & 9 & 18 \\ 12 & -18 & 36 \end{array}\right] 2f1 + f2 \quad \left[\begin{array}{cc:c} 6 & 9 & 18 \\ 0 & 0 & 72 \end{array}\right]$ Única solución cuando k es un número real distinto a 3 y -3. Solución infinita cuando k es 3. Ninguna solución cuando k es -3.

TEMA 3 (30 puntos):

	Explicación	Operatoria
A.	La matriz A esta dada por todos los coeficientes que acompañan a las variables, la matriz X son todas las variables, y la matriz B son los términos a los que están igualados cada ecuación.	Forma matricial: $\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}}$ Matriz aumentada: $\boxed{\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right]}$
B.	Se procede a calcular cada cofactor recordando que se debe intercalar el símbolo empezando con positivo, luego se obtiene la matriz de cofactores, sabiendo que la adjunta es la transpuesta de la matriz de cofactores. Para poder obtener la inversa de A se debe obtener el determinante que en este caso es -1, por lo que la inversa es la adjunta con signos cambiados.	$C11 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = -7$ $C12 = -\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 3$ $C13 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = -12$ $C21 = -\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = -2$ $C22 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$ $C23 = -\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = -4$ $C31 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 4$ $C32 = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = -2$ $C33 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = 7$ $C = \begin{bmatrix} -7 & 3 & -12 \\ -2 & 1 & -4 \\ 4 & -2 & 7 \end{bmatrix}$ $Adj(A) = \begin{bmatrix} -7 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \\ -12 & -4 & 7 \end{bmatrix}$ $\det(A) = 1(1-8) - (2)(-3-0) + 0 = -1$ $\boxed{A^{-1} = -\begin{bmatrix} -7 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \\ -12 & -4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \\ 12 & 4 & -7 \end{bmatrix}}$

C.	Como sabemos que AX=B, entonces también podemos despejar para X, obteniendo que X= INV(A)B, por lo que se opera y se obtiene el resultado de esta.	$X = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \\ 12 & 4 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28+2+8 \\ -12-1-4 \\ 48+4+14 \end{bmatrix}$ $\boxed{X = \begin{bmatrix} 38 \\ -17 \\ 66 \end{bmatrix}}$