UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-107-1-M-2-00-2017

CURSO:	**Matemática Intermedia 1**
SEMESTRE:	**Segundo**
CÓDIGO DEL CURSO:	**107**
TIPO DE EXAMEN:	**Primer Parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**Agosto del 2017**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Melvin Saúl Calel Otzoy**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Melvin Saúl Calel Otzoy**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

Universidad de San Carlos de Guatemala	*Facultad de Ingeniería*
Departamento de Matemática	*Matemática Intermedia 1*
Primer Examen Parcial – Agosto de 2017	*Jornada Matutina*

Tema No. 1: (50 Puntos, 10 puntos cada inciso)

Resuelva las siguientes integrales:

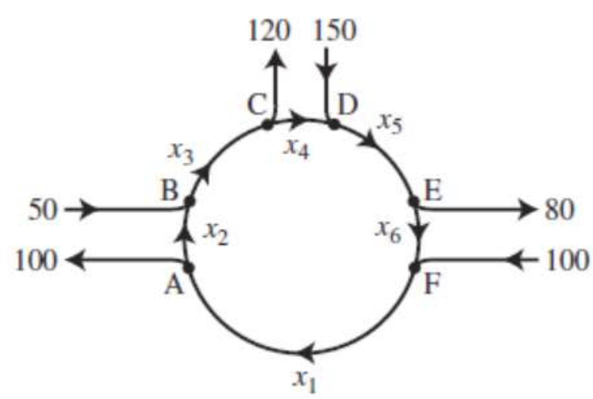
a) $\displaystyle\int \frac{\sec^4\theta}{\sqrt{\tan\theta}}d\theta$ b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\left(x^2+4\right)}$

c) $\displaystyle\int \operatorname{sen}\left(Ln\left(x\right)\right)dx$ d) $\displaystyle\int \frac{s}{\sqrt{s^2-6s+13}}ds$ e) $\displaystyle\int \frac{dx}{2\left(\sqrt[3]{x}\right)+\sqrt{x}}$

Tema No. 2: (11 puntos) Encuentre el valor de w (por medio de cofactores usando fila 3), sabiendo que el valor del determinante es 8.

$$\begin{vmatrix} w & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Tema No. 3: (11 puntos) A menudo, en Inglaterra las intersecciones se construyen en forma de "glorieta" con un solo sentido, como indica la figura. Suponga que el tráfico debe moverse en la dirección mostrada. Encuentre la solución general del flujo de la red. Plantee el sistema de ecuaciones lineales y encuentre la solución al problema planteado, usando eliminación gaussiana.



Tema No. 4: (16 puntos) Encuentre la matriz inversa de la matriz de coeficientes del sistema

$$\begin{aligned} 2x &+4y &+6z &=18 \\ 4x &+5y &+6z &=24 \\ 3x &+y &-2z &=4 \end{aligned}$$

a) Usando cofactores (11 puntos).

b) Usando A^{-1} encuentre la solución al sistema (5 puntos).

Tema No. 5: (12 puntos) Determine si el siguiente sistema homogéneo tiene soluciones no triviales. Si es asi expréselas en forma matricial.

$$\begin{aligned} 3x &+5y &-4z &=0 \\ -3x &-2y &+4z &=0 \\ 6x &+y &-8z &=0 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema No. 1: 50 puntos
Resuelva las siguientes integrales:

a) $\int \frac{\sec^4 \theta}{\sqrt{\tan \theta}} d\theta$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se aplica la igualdad trigonométrica y las sustituciones siguientes para resolver la integral. $sec^2\theta = tan^2 + 1$ $u = \tan \theta$ $du = sec^2\theta$	$\int \frac{sec^4\theta}{\sqrt{\tan \theta}} d\theta = \int \frac{sec^2\theta * sec^2\theta}{\sqrt{\tan \theta}} d\theta$ $= \int \frac{(tan^2\theta + 1) * sec^2\theta}{\sqrt{\tan \theta}} d\theta$ $Sea: \quad u = \tan \theta$ $du = sec^2\theta$ $\int \frac{u^2 + 1}{u^{1/2}} du = \int \frac{u^2}{u^{1/2}} du + \int \frac{1}{u^{1/2}} du$ $= \int u^{3/2} du + \int u^{-1/2} du = \frac{2}{5} u^{5/2} + 2u^{\frac{1}{2}} + c$ $= \frac{2}{5} (\tan \theta)^{5/2} + 2(\tan \theta)^{\frac{1}{2}} + c$

b) $\int \frac{dx}{x^2\left(x^2+4\right)}$

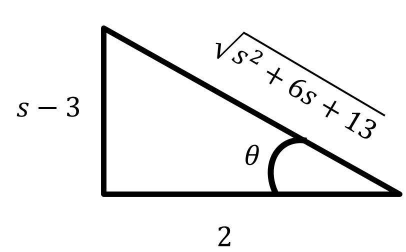
No.	Explicación	Operatoria
1.	Se realiza la separación en fracciones parciales de la integral.	$\int \frac{dx}{x^2(x^2 + 4)}$ $\frac{1}{x^2(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}$ $\frac{1}{x^2(x^2 + 4)} = \frac{A(x^2 + 4)x + B(x^2 + 4) + x^2(Cx + D)}{x^2(x^2 + 4)}$ $1 = (Ax^2 + 4A)x + Bx^2 + 4B + Cx^3 + Dx^2$ $1 = Ax^3 + 4Ax + Bx^2 + 4B + Cx^3 + Dx^2$ $1 = x^3(A + C) + x^2(B + D) + 4Ax + 4B$ $A + C = 0$ $B + D = 0$ $4A = 0$ $4B = 1$ $A = 0, \ B = \frac{1}{4}, \ D = -\frac{1}{4}, \ C = 0$

2.	Se resuelve la integral con las fracciones parciales planteadas.	$\int \frac{dx}{x^2(x^2+4)} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+4}$ $= \frac{1}{4}x^{-1} - \frac{1}{8}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$

c) $\int \operatorname{sen}(Ln(x))\,dx$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se plantean las sustituciones para resolver la integral por partes.	$Sea: \quad u = \sin(\ln x) \quad dv = dx$ $du = \frac{\cos(\ln x)}{x} \quad v = x$ $\int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - \int \frac{x\cos(\ln x)}{x}dx$ $= x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx$ $Sea: \quad u = \cos(\ln x) \quad dv = dx$ $du = \frac{\sin(\ln x)}{x} \quad v = x$ $= x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)\,dx$
2.	Se resuelve la integral como una ecuación, despejando el término: $\int \sin(\ln x)dx$	$2\int \sin(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x)$ $\int \sin(\ln x) = \frac{1}{2}x\sin(\ln x) - \frac{1}{2}x\cos(\ln x) + c$

d) $\int \frac{s}{\sqrt{s^2-6s+13}}ds$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se plantean los arreglos algebraicos y las sustituciones trigonométricas para resolver la integral.	$s^2 - 6s + 13 = (s-3)^2 + 4$  $s = 2\tan\theta \quad ds = 2sec^2\theta d\theta$ $\tan\theta = \frac{s-3}{2} \quad \sec\theta = \frac{\sqrt{s^2+6s+13}}{2}$

2.	Se resuelve la integral con las sustituciones planteadas.	$\int \frac{(2\tan\theta+3)*2sec^2\theta}{2\sec\theta}d\theta = \int (2\tan\theta+3)*\sec\theta d\theta$ $= 2\int \tan\theta\sec\theta\, d\theta + 3\int \sec\theta\, d\theta = 2\sec\theta + 3\ln\lvert\sec\theta+\tan\theta\rvert$ $2\frac{\sqrt{s^2+6s+13}}{2} + 3\ln\left\lvert\frac{\sqrt{s^2+6s+13}}{2}+\frac{s-3}{2}\right\rvert + c$ $\int \frac{s}{\sqrt{s^2+6s+13}}ds = \sqrt{s^2+6s+13} + 3\ln\left\lvert\frac{\sqrt{s^2+6s+13}}{2}+\frac{s-3}{2}\right\rvert + c$

e) $$\int \frac{dx}{2\left(\sqrt[3]{x}\right)+\sqrt{x}}$$

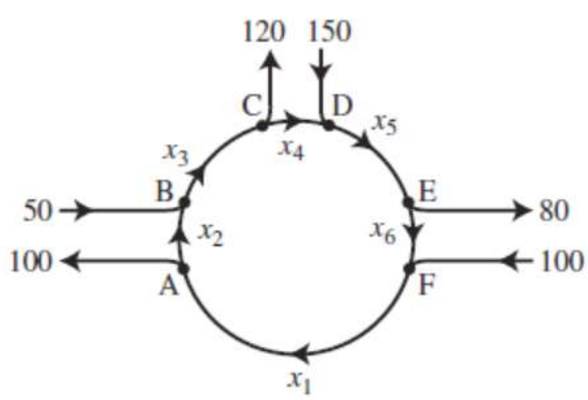
No.	Explicación	Operatoria
1.	Se realizan las sustituciones y los arreglos albegraicos necesarios para resolver la integral.	$Sea\text{:}\ z^6 = x$ $6z^5dz = dx$ $\int \frac{dx}{2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}dx \to \int \frac{6z^5dz}{2z^2+z^3}$ $Dividiendo$: $\frac{z^5}{z^3+2z^2} = z^2-2z+4-\frac{8z^2}{z^3+2z^2}$ $Integrando$: $6\int\left(z^2-2z+4-\frac{8z^2}{z^3+2z^2}\right)dz = 6\left[\int z^2dz - 2\int z\,dz + 4\int dz - 8\int\frac{z^2}{z^2(z+2)}dz\right]$ $= 6\left[\frac{1}{3}z^3 - z^2 + 4z - 8\ln\lvert z+2\rvert\right]$ $\int \frac{dx}{2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}dx = 2x^{\frac{1}{2}} - 6x^{\frac{1}{3}} + 24x^{\frac{1}{6}} - 48\ln\left\lvert x^{\frac{1}{6}}+2\right\rvert + c$

Tema No. 2: 11 puntos
Encuentre el valor de w (por medio de cofactores usando fila 3), sabiendo que el valor del determinante es 8.

$$\begin{vmatrix} w & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se encuentra el determinante de la matriz por medio de los cofactores de la fila 3 para hallar el valor de w.	$\begin{vmatrix} w & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} w & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ $-3(-2) - 2(1-w) = 8$ $-6 + 2w - 2 = 8$ $w = 2$

Tema No. 3: 11 puntos
A menudo, en Inglaterra las intersecciones se construyen en forma de "glorieta" con un solo sentido, como indica la figura. Suponga que el tráfico debe moverse en la dirección mostrada. Encuentre la solución general del flujo de la red. Plantee el sistema de ecuaciones lineales y encuentre la solución al problema planteado, usando eliminación gaussiana.



No.	Explicación	Operatoria
1.	Se plantean las ecuaciones con base a la información proporcionada.	$A \to x_1 = x_2 + 100$ $B \to x_2 + 50 = x_3$ $C \to x_3 = 120 + x_4$ $D \to x_4 + 150 = x_5$ $E \to x_5 = 80 + x_6$ $F \to x_6 + 100 = x_1$ $x_1 - x_2 = 100$ $x_2 - x_3 = -50$ $x_3 - x_4 = 120$ $x_4 - x_5 = -150$ $x_5 - x_6 = 80$ $x_6 = -100$

2.	Se resuelve el sistema por medio de eliminación gaussiana.	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -50 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 80 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -100 \end{pmatrix} F_6 + F_1$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -50 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 80 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} F_6 + F_2$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -50 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 80 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -50 \end{pmatrix} F_6 + F_3$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -50 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 70 \end{pmatrix} F_6 + F_4$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -50 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -80 \end{pmatrix} F_6 + F_5$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -50 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -80 \end{pmatrix} F_6 + F_5$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -50 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_1 + F_2 \\ F_2 + F_3 \\ F_3 + F_4 \\ F_4 + F_5 \\ \\ \\ \end{array}$
3.	Se plantea la solución del sistema.	$x_1 = x_6 + 100$ $x_2 = x_6$ $x_3 = x_6 + 50$ $x_4 = x_6 - 70$ $x_5 = x_6 + 80$ $x_6 = x_6$

		$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 50 \\ -70 \\ 80 \\ 0 \end{pmatrix} + x_6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Tema No. 4: 16 puntos

Encuentre la matriz inversa de la matriz de coeficientes del sistema

$$\begin{aligned} 2x \quad +4y \quad +6z \quad &= 18 \\ 4x \quad +5y \quad +6z \quad &= 24 \\ 3x \quad +y \quad -2z \quad &= 4 \end{aligned}$$

a) Usando cofactores

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se encuentran los cofactores y el determinante de la matriz A. $A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^T$	$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ $C_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \quad C_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \quad C_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ $C_{21} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \quad C_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \quad C_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ $C_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \quad C_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \quad C_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -16 & 26 & -11 \\ 14 & -22 & 10 \\ -6 & 12 & -6 \end{pmatrix}$ $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+1}(-10-6) +$ $4(-1)^{1+2}(-8-18) + 6(-1)^{1+3}(4\text{-}15)$ $\det A = 6$ $A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -16 & 14 & -6 \\ 26 & -22 & 12 \\ -11 & 10 & -6 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} -8/3 & 7/3 & -1 \\ 13/3 & -11/3 & 2 \\ -11/6 & 5/3 & -1 \end{pmatrix}$

b) Usando A^{-1} encuentre la solución al sistema.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se encuentra la solución del sistema con la forma: $x = A^{-1}B$	$A^{-1} = \begin{pmatrix} -8/3 & 7/3 & -1 \\ 13/3 & -11/3 & 2 \\ -11/6 & 5/3 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 8 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8/3 & 7/3 & -1 \\ 13/3 & -11/3 & 2 \\ -11/6 & 5/3 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 8 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Tema No. 5: 12 puntos

Determine si el siguiente sistema homogéneo tiene soluciones no triviales. Si es asi exprésela en forma matricial.

$$\begin{aligned} 3x \quad +5y \quad -4z &= 0 \\ -3x \quad -2y \quad +4z &= 0 \\ 6x \quad +y \quad -8z &= 0 \end{aligned}$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se resuelve el sistema por medio de eliminación gaussiana para expresar la solución en forma matricial.	$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & -8 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ F_2 + F_1 \\ F_3 + 2F_1 \end{matrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ F_3 + 3F_2 \end{matrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $y = 0$ $3x - 4z = 0$ $x = \frac{4}{3}z$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$