CLAVE-107-2-M-2-00-2015

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO:	Matemática Intermedia 1
TIPO DE EXAMEN:	Segundo Examen Parcial
AUXILIAR:	Julio Isaí Santos Mayorga
FECHA:	18 de marzo de 2015
SEMESTRE:	Primero
HORARIO DE EXAMEN:	7 a.m. – 8:50 a.m.
REVISÓ:	Ing. César Ariel Villela Rodas

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemática
Matemática Intermedia I, Sección F
Segundo Examen Parcial
Guatemala 18032015306300900

Tema 1(10 Puntos): Descomponga la siguiente expresión racional, usando el método de las fracciones parciales, en sus factores irreducibles, sin determinar los coeficientes de los mismos

$$R(x) = \frac{1}{x^8 - 1}$$

Tema 2(30 Puntos): Evalúe las siguientes integrales indefinidas, dejando constancia de su procedimiento, en su cuadernillo de trabajo:

$$a)\int \frac{dw}{w+3+3\sqrt{w+1}}, \quad b)\int \sqrt{\frac{z}{z+1}}\,dz, \quad c)\int \frac{dx}{\sqrt{1-cosx}}$$

Tema 3(15 Puntos): Para las siguientes integrales impropias:

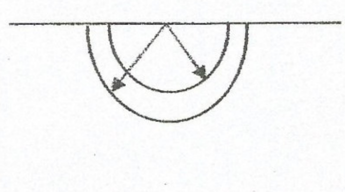
a) Clasifíquelas de acuerdo a su clase
b) Evalúelas para determinar cuáles son convergentes y cuales son divergentes

$$a)\int_0^{\pi/2} \frac{cosx}{\sqrt{senx}}dx, \quad b)\int_2^{\infty} \frac{dx}{2x^2+3x-5}, \quad c)\int_0^{\pi} tan\beta d\beta$$

Tema 4(20 Puntos): Dada la función $f(x) = e^{-x}$

a) Determine la longitud de arco de f(x) si $0 \leq x \leq 1$, (sugerencia: debe usar un método numérico)
b) Rote f(x) alrededor del eje x y a continuación determine el área superficial del sólido generado por la misma si $0 \leq x \leq 1$,

Tema 5(25 Puntos): Una roldana de plástico de radio externo 1.00 m y radio interno 80.00 cm está sumergida en agua, en posición vertical, tal como se muestra en la siguiente figura. Determine la fuerza hidrostática sobre una de las caras de la misma



TEMA NO. 1

Se desarrolla el denominador de la expresión algebraicamente de la siguiente forma:

$$(x^8-1)=[(x^4)^2-1^2]=(x^4-1)(x^4+1)$$
$$(x^4-1)=[(x^2)^2-1^2]=(x^2-1)(x^2+1)$$
$$(x^2-1)=(x-1)(x+1)$$
$$(x^8-1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$$

Sustituyendo en la expresión original:

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x+1)}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)}+\frac{Ex+F}{(x^4+1)}$$

TEMA NO. 2

a)

$$\int\frac{dw}{w+3+3\sqrt{w+1}}$$

Realizando una sustitución:

$$x=\sqrt{w+1}\rightarrow \quad w=x^2-1$$
$$dw=2xdx$$

$$\int\frac{2xdx}{x^2-1+3+3x}=\int\frac{2xdx}{x^2+3x+2}=\int\frac{2xdx}{(x+2)(x+1)}$$

Separándola en fracciones parciales:

$$\frac{2x}{(x+2)(x+1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1}$$

$$2x=A(x+1)+B(x+2)$$

$$Sistema\ de\ ecuaciones\text{: }\begin{cases}2=A+B\\0=A+2B\end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$A=\ -2B$$
$$2=\ -2B+B$$
$$B=\ -2$$
$$A=\ -2(-2)=4$$

Sustituyendo para integrar:

$$\int \left[\frac{4}{x+2} - \frac{2}{x+1}\right] dx = 4\ln|x+2| - 2\ln|x+1| + C$$

Regresando a la variable original:

$$\int \frac{du}{(u^{1/2}+2)(u^{1/2}+1)} = 4\ln\left|u^{1/2}+2\right| - 2\ln\left|u^{1/2}+1\right| + C$$

$$\int \frac{dw}{w+3+3\sqrt{w+1}} = \mathbf{4\,ln}\left|(\boldsymbol{w}+\mathbf{1})^{\mathbf{1/2}}+\mathbf{2}\right| - \mathbf{2\,ln}\left|(\boldsymbol{w}+\mathbf{1})^{\mathbf{1/2}}+\mathbf{1}\right| + \boldsymbol{C}$$

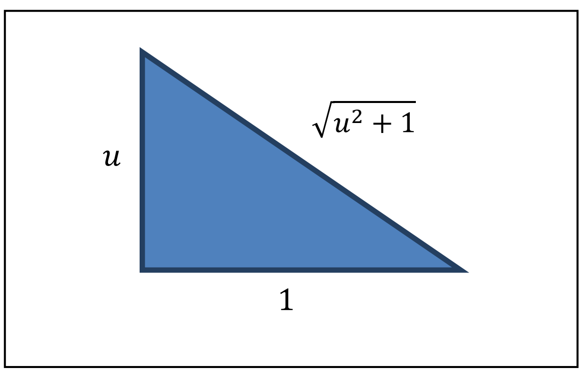
b)

$$\int \sqrt{\frac{z}{z+1}}\,dz = \int \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{z+1}}\,dz$$

Realizando una sustitución:

$$z = u^2$$
$$dz = 2udu$$

$$\int \frac{2u^2}{\sqrt{u^2+1}}\,du$$



$$\sec\theta = \sqrt{u^2+1}$$

$$\tan\theta = u$$
$$\sec^2\theta\,d\theta = du$$

$$2\int \frac{\tan^2\theta\sec^2\theta}{\sec\theta}\,d\theta = 2\int \tan^2\theta\sec\theta\,d\theta = 2\int (\sec^2\theta - 1)\sec\theta\,d\theta$$

$$= 2\int \sec^3\theta \, d\theta - 2\int \sec\theta \, d\theta$$

Resolviendo la segunda parte de la integral:

$$2\int \sec\theta \, d\theta = \ 2\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$

Resolviendo la primera parte de la integral:

$$2\int \sec^3\theta \, d\theta = 2\int \sec^2\theta \sec\theta \, d\theta$$

Integración por partes:

$$u = \ \sec\theta \qquad\qquad dv = \sec^2\theta \, d\theta$$
$$du = \sec\theta\tan\theta \, d\theta \qquad\qquad v = \tan\theta$$

$$\int \sec^3\theta \, d\theta = \sec\theta\tan\theta - \int \tan^2\theta \sec\theta \, d\theta$$

$$= \sec\theta\tan\theta - \int (\sec^2\theta - 1)\sec\theta \, d\theta$$

$$= \sec\theta\tan\theta - \int \sec^3\theta \, d\theta + \int \sec\theta \, d\theta$$

$$2\int \sec^3\theta \, d\theta = \sec\theta\tan\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$

Reuniendo las dos partes de la integral:

$$2\int \frac{\tan^2\theta \sec^2\theta}{\sec\theta} d\theta = \sec\theta\tan\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta| - 2\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$

$$= \sec\theta\tan\theta - \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$

Regresando a la variable original:

$$\int \sqrt{\frac{z}{z+1}} dz = \sqrt{z+1} * \sqrt{z} - \ln\left|\sqrt{z+1} + \sqrt{z}\right| + C$$

$$\int \sqrt{\frac{z}{z+1}} dz = \sqrt{z(z+1)} - \ln\left|\sqrt{z+1} + \sqrt{z}\right| + C$$

c)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-cosx}}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-cosx}} * \frac{\sqrt{1+cosx}}{\sqrt{1+cosx}} dx = \int \frac{\sqrt{1+cosx}}{\sqrt{1-cos^2x}} dx$$

Utilizando la identidad trigonométrica $sen^2x + cos^2x = 1$

$$= \int \frac{\sqrt{1+cosx}}{\sqrt{sen^2x}} dx = \int \frac{\sqrt{1+cosx}}{senx} dx$$

Se lleva a cabo el siguiente desarrollo algebraico:

$$\frac{\sqrt{1+cosx}}{senx} = \frac{\sqrt{1+cosx}}{senx} * \frac{senx}{senx} * \frac{\sqrt{1+cosx}}{\sqrt{1+cosx}} = \frac{(1+cosx) * senx}{(1+cosx)^{1/2} * sen^2x}$$

La integral queda expresada de la siguiente manera:

$$= 2 \int \frac{(1+cosx) * \frac{1}{2} * senx}{(1+cosx)^{1/2} * sen^2x} dx$$

Realizando la siguiente sustitución:

$$w = \sqrt{1+cosx}$$
$$dw = \frac{1}{2} * \frac{-senx}{\sqrt{1+cosx}}$$

$$w^2 = 1 + cosx$$
$$cos^2x = (w^2-1)^2$$
$$1 - sen^2x = (w^2-1)^2$$
$$sen^2x = 1 - (w^2-1)^2$$

$$-2 \int \frac{w^2}{1-(w^2-1)^2} dx = -2 \int \frac{w^2}{1-(w^4-2w^2+1)} dw = 2 \int \frac{w^2}{w^2(w^2-2)} dw$$

$$= 2 \int \frac{1}{w^2-2} dw = 2 \int \frac{1}{(w-\sqrt{2})(w+\sqrt{2})} dw$$

Fracciones parciales:

$$\frac{1}{(w-\sqrt{2})(w+\sqrt{2})} = \frac{A}{w-\sqrt{2}} + \frac{B}{w+\sqrt{2}}$$

$$1 = A\left(w+\sqrt{2}\right) + B(w-\sqrt{2})$$

$$\begin{aligned} Grado\ 1: &\quad 0 = A + B \\ Grado\ 0: &\quad 1 = \sqrt{2}A - \sqrt{2}B \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$A = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$
$$B = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

La integral se expresa de la siguiente manera:

$$2\int\left[\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{w-\sqrt{2}} - \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{w+\sqrt{2}}\right]dw = \frac{2}{2\sqrt{2}}\ln\left|w-\sqrt{2}\right| - \frac{2}{2\sqrt{2}}\ln\left|w+\sqrt{2}\right| + C$$

Regresando a la variable original:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-cosx}} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{1+cosx}-\sqrt{2}\right| - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{1+cosx}+\sqrt{2}\right| + C}$$

TEMA NO. 3

a)

a) Tipo II: Integrandos discontinuos.
b) Tipo I: Intervalos infinitos.
c) Tipo II: Integrandos discontinuos.

b)

a)

$$\int_0^{\pi/2} \frac{cosx}{\sqrt{senx}} dx$$

$$\lim_{t\to 0^+} \int_t^{\pi/2} \frac{cosx}{\sqrt{senx}} dx = \lim_{t\to 0^+} [2\sqrt{senx}]_t^{\frac{\pi}{2}} + C$$

$$\lim_{t\to 0^+} \left[2\sqrt{sen\left(\frac{\pi}{2}\right)} - 2\sqrt{sen(t)}\right] = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{0} = \mathbf{2}\ (\boldsymbol{Converge})$$

b)

$$\int_{\mathbf{2}}^{\infty} \frac{dx}{2x^2+3x-5} \rightarrow \lim_{t\to\infty} \int_2^t \frac{1}{(2x+5)(x-1)} dx$$

$$\frac{1}{(2x+5)(x-1)} = \frac{A}{2x+5} + \frac{B}{x-1}$$

$$1 = A(x-1) + B(2x+5)$$

Sistema de ecuaciones:

$$0 = A + 2B$$
$$1 = -A + 5B$$

$$A = -\frac{2}{7} \qquad B = \frac{1}{7}$$

$$\lim_{t\to\infty} \int_2^t \left[\frac{-2}{7(2x+5)} + \frac{1}{7(x-1)}\right] dx = \lim_{t\to\infty} [-\ln(2x+5) + \ln(x-1)]_2^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} [-\ln(2t+5) + \ln(t-1) - \ln(1-1) + \ln(2(2)+5)]$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left[\ln\left(\frac{t-1}{2t+5}\right) + \ln(9)\right] = ln\left(\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t-1}{2t+5}\right)\right) + \ln(9)$$

Aplicando L'Hospital:

$$= \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln(9) = \mathbf{ln}\left(\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}}\right) \rightarrow \boldsymbol{Converge}$$

c)

$$\int_0^{\pi} tan\beta d\beta$$

$$= \lim_{t\to\pi} \int_0^{t} tan\beta d\beta = \lim_{t\to\pi} [\ln|sec\beta|]_0^t = \lim_{t\to\pi} [\ln|\sec(t)| - \ln|\sec(0)|]$$

$$= [\ln|-1| - \ln|1|] = \mathbf{0} \to \boldsymbol{Converge}$$

TEMA NO. 4

a)

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + (-e^{-x})^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{-2x}}\, dx$$

Utilizando el método del trapecio con n=10:

$$\Delta x = \frac{1-0}{10} = \frac{1}{10}$$

$$\int_0^1 \sqrt{1 + e^{-2x}}\, dx \approx T_{10} = \frac{1/10}{2}[f(0) + 2f(0.1) + 2f(0.2) + \cdots + 2f(0.9) + f(1)]$$

$$T_{10} = 0.05[\sqrt{2} + 2\sqrt{1.818730} + 2\sqrt{1.670320} + \cdots + 2\sqrt{1.165299} + \sqrt{1.135335}]$$

$$T_{10} = \mathbf{1.1927}\ \boldsymbol{unidades}$$

b)

$$L = \int_0^1 2\pi e^{-x}\sqrt{1 + (-e^{-x})^2}\, dx = \int_0^1 2\pi e^{-x}\sqrt{1 + e^{-2x}}\, dx$$

Utilizando el método del trapecio con n=10:

$$\Delta x = \frac{1-0}{10} = \frac{1}{10}$$

$$\int_0^1 2\pi e^{-x}\sqrt{1 + e^{-2x}}\, dx \approx T_{10} = \frac{1/10}{2}[f(0) + 2f(0.1) + \cdots + 2f(0.9) + f(1)]$$

$$T_{10} = 0.05[8.885766 + 2(7.667162) + \cdots + 2(2.757614) + 2.462904]$$

$$T_{10} = \mathbf{4.8580}\ \boldsymbol{u^2}$$

TEMA NO. 5

El problema se simplifica al verlo de la siguiente manera: la fuerza hidrostática sobre la roldana es la diferencia entre la fuerza ejercida sobre una placa con forma circular (de radio mayor) y otra (de radio menor).

Dada la ecuación general de una circunferencia:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Tomaremos el centro de ambas circunferencias en (h,k) = (0,0).

La ecuación de la circunferencia mayor es:

$$x^2+y^2=1^2$$
$$x=\pm(1-y^2)^{1/2}$$

Y la de la circunferencia menor es:

$$x^2+y^2=0.8^2$$
$$x=\pm(0.64-y^2)^{1/2}$$

La fuerza hidrostática está dada por:

$$F=\ \rho g\int_{-1}^{0}(-y)*2*(1-y^2)^{1/2}dy-\ \rho g\int_{-0.8}^{0}(-y)*2*(0.64-y^2)^{1/2}dy$$

Realizando las siguientes sustituciones:

$$u=1-y^2$$
$$du=-2ydy$$

Límites de integración:

$$desde\ u=1-(-1)^2=0$$
$$hasta\ u=1-(0)^2=1$$

$$w=0.64-y^2$$
$$dw=\ -2ydy$$

Límites de integración:

$$desde\ w=0.64-(-0.8)^2=0$$
$$hasta\ w=0.64-(0)^2=0.64$$

$$F = \rho g \int_0^1 u^{1/2} du - \rho g \int_0^{0.64} w^{1/2} dw$$

$$F = \rho g \left[\frac{2}{3} u^{3/2}\right]_0^1 - \rho g \left[\frac{2}{3} w^{3/2}\right]_0^{0.64}$$

$$F = \frac{2}{3}\, \rho g \left[(1)^{3/2} - (0)^{3/2} - (0.64)^{3/2} + (0)^{3/2}\right]$$

$$F = \frac{2}{3}\left(1000 \frac{kg}{m^3}\right)\left(9.8 \frac{m}{s^2}\right)(0.488\, m^3) = \mathbf{3188.27\ N}$$