**UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA**

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

**CLAVE-107-4-1-M-00-2017**

| | |
|---|---|
| **CURSO:** | **Matemática Intermedia 1** |
| **SEMESTRE:** | **Primero** |
| **CÓDIGO DEL CURSO:** | **107** |
| **TIPO DE EXAMEN:** | **Examen Final** |
| **FECHA DE EXAMEN:** | **23 de mayo de 2017** |
| **RESOLVIÓ EL EXAMEN:** | **Abner López** |
| **COORDINADOR:** | **Ing. José Alfredo González Díaz** |

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
FACULTAD DE INGENIERIA MATEMATICA INTERMEDIA 1
ESCUELA DE CIENCIAS EXAMEN FINAL 10 DE MAYO 2017

# *TEMARIO* A

## *TEMA No.1 (15 Puntos)*

A) Determine para que valores de $k$ el sistema NO es INVERTIBLE.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ -x + ky + 8z &= k \\ -x + 3y + kz &= 3 \end{aligned}$$

B) Calcule $A^{-1}$ usando cofactores y luego obtenga la solución del sistema.

$$\begin{aligned} 2x - y &= 2 \\ x + 3y &= 8 \end{aligned}$$

(8 puntos)

## *TEMA No.2 (15 Puntos)*

Resolver

A) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}-1}}{x}dx$

B) $\displaystyle\int_{-1}^{\infty} \frac{x}{\left(x^2+1\right)^{3/2}}dx$

## *TEMA No.3 (25 Puntos)*

A) Plantee la o las integrales que calculen

i) Área dentro de $r^2 = sen2\theta$ y fuera de $r^2 = \cos 2\theta$

ii) Longitud del arco que limita la región común (ó área de intersección) entre ambas curvas polares.

B) Dadas las ecuaciones paramétricas

$x(t) = 4sent \quad y(t) = 3\cos t$

i) Obtenga la ecuación cartesiana (2 puntos)

ii) La grafica con su dirección para $\frac{\pi}{2} \le t \le \pi$ (4 puntos)

iii) Plantee la integral que calcule el área generada al girar el segmento respecto del eje y. (***en paramétricas***) (4 puntos)

## *TEMA No.4 (15 Puntos)*

A) Obtenga una ***sucesión*** que represente la sucesión de términos: $2,8,2,8,2,8,,,,\{a_n\}$

B) Determine si la ***sucesión*** $\left\{\dfrac{3^n+1}{3^n}\right\}$ y si la **serie** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+1}{3^n}$ convergen o divergen

C) Determine centro, radio e intervalo de convergencia abierto para $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!\,(2x)^n$

## *TEMA No.5 (18 Puntos)*

A) Dos planos paralelos se cortan por una recta en los puntos (2,-3,1) y (0,-5,5)

i) Obtenga la ecuación paramétrica de la recta

ii) Si uno de los planos es $x+y-2z=-3$ encuentre la ecuación del otro plano.

iii) Determine si la recta es perpendicular a los 2 planos. (3 puntos)

B) Dos rectas perpendiculares se cruzan entre sí en el punto (4,5,6). Si las rectas son paralelas al plano $x+y-2z=-3$, ¿Determine la distancia perpendicular entre las rectas y el plano?

(9 puntos)

## *TEMA No.6 (12 Puntos)*

Identifique y obtenga la gráfica de las superficies en R3

i) $r=\theta$ (si $0\le\theta\le 2\pi$)

ii) $r=\dfrac{1}{3-2\cos\theta}$

iii) $\rho=9$ (primer octante)

iv) $z^2=r^2+1$

A) Determine para que valores de $k$ el sistema NO es INVERTIBLE.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ -x & + & ky & + & 8z & = & k \\ -x & + & 3y & + & kz & = & 3 \end{array}$$

| No. | Explicación | Operatoria |
|---|---|---|
| **1** | Para determinar el valor de ***k*** debemos llevar la matriz a su forma escalonada mediante operaciones.<br>Escribimos el sistema de ecuaciones en su forma equivalente de matriz.<br>Para esto escribimos los coeficientes de cada una de las variables. | $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & k & 8 \\ -1 & 3 & k \end{pmatrix}$ |
| **2** | Realizamos la operación elemental en la Fila 2 y Fila 3 sumando los valores de la Fila 1 a cada una las filas antes mencionadas, logrando con esto convertir en cero los primeros elementos de la Fila 2 y 3.<br>Las operaciones se expresan cómo:<br>$F_2 = F_2 + F_1$<br>$F_3 = F_3 + F_1$<br>Dónde $F_n$ es la Fila n. | $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1+1 & k+1 & 8+1 \\ -1+1 & 3+1 & k+1 \end{pmatrix}$ |
| **3** | Simplificamos las operaciones de la matriz resultantes del paso anterior. | $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k+1 & 9 \\ 0 & 4 & k+1 \end{pmatrix}$ |
| **4** | El siguiente paso para convertir en 0 el segundo elemento de la Fila 3.<br>Para esto multiplicamos la fila 3 por ($k$ + 1) y le restamos cuatro por la Fila 2.<br>La operación se expresa cómo:<br>$F_3 = (k+1)F_3 - 4F_2$<br>Dónde $a_{ij}$ es el elemento de la Fila "i" y columna "j". | Para $a_{31} = (k+1) * 0 - 4 * 0$<br>Para $a_{32} = 4(k+1) - 4(k+1)$<br>Para $a_{33} = (k+1)(k+1) - 4 * 9$ |
| **5** | Simplificando los resultados y reescribiéndolos en la matriz: | $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k+1 & 9 \\ 0 & 0 & (k+1)^2 - 36 \end{pmatrix}$ |
| **6** | En este punto para que el sistema no sea Invertible o no tenga Inversa; su determinante tiene que ser 0.<br>Esto sucede cuando $(k+1)^2 - 36 = 0$.<br><br>Despejamos el valor de $k$ y obtenemos los valores dónde la matriz no tiene inversa. | $(k+1)^2 - 36 = 0$<br><br>$((k+1)+6)((k+1)-6) = 0$<br><br>$(k+7)(k-5) = 0$ |

| | | |
|---|---|---|
| | Observamos que es una diferencia de cuadrados y puede escribirse en su forma de factores. | |
| **7** | Los valores de *k* son: $k = -7 \ y \ k = 5$ | $(k+7) = 0$<br>$k = -7$<br><br>$(k-5) = 0$<br>$k = 5$ |

| |
|---|
| **R// Los valores de "k" para que el sistema sea no invertible son:**<br>**k=5 y k=-7.** |

B) Calcule $A^{-1}$ usando cofactores y luego obtenga la solución del sistema.

$$\begin{array}{ccccc} 2x & - & y & = & 2 \\ x & + & 3y & = & 8 \end{array}$$

| No. | Explicación | Operatoria |
|---|---|---|
| **1** | Para calcular la matriz inversa utilizando el método de cofactores, escribimos primero la matriz de coeficientes del sistema dado. | $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ |
| **2** | Calculamos el determinante de la matriz del paso 1.<br>En este caso es: El primer elemento de la primera fila multiplicado por el segundo elemento de la segunda columna menos el segundo elemento de la primera fila por el primer elemento de la segunda fila o bien:<br>$\det(A) = a_{11} * a_{22} - a_{12} * a_{21}$<br><br>Simplificamos las multiplicaciones y restas para obtener el determinante. | $\det(A) = 2 * 3 - (-1) * 1$<br>$det(A) = 6 - (-1)$<br>$det(A) = 6 + 1$<br>$det(A) = 7$ |
| **3** | Calculamos la matriz adjunta de la matriz del paso 1.<br>Para ello debemos obtener la matriz de cofactores, para este caso una matriz de 2x2 la matriz de cofactores es:<br>$\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$<br><br>Simplificamos la matriz obtenida. | $cof(A) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -(-1) & 2 \end{pmatrix}$<br><br>$cof(A) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ |
| **4** | Ahora calculamos la matriz transpuesta de la matriz de cofactores del paso 3.<br>Para esto intercambiamos las filas por las columnas de la matriz inicial. | $adj(A) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ |

| | | |
|---|---|---|
| **5** | Según la definición de matriz inversa: $$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$ Sustituimos el determinante y la matriz adjunta calculados en los pasos anteriores en la ecuación. Simplificamos la matriz encontrada. | $$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$ $$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/7 & 1/7 \\ -1/7 & 2/7 \end{pmatrix}$$ |
| **6** | Para obtener la solución del sistema de la forma: $$AX = B$$ Dónde A es la matriz de coeficientes, X la matriz de variables o incógnitas y B la matriz de términos independientes la solución es: $$X = A^{-1}\,B$$ Por lo que debemos multiplicar la matriz inversa por la matriz de términos independientes. | $$B = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$ $$X = \begin{pmatrix} 3/7 & 1/7 \\ -1/7 & 2/7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$ |
| **7** | Para realizar la multiplicación de matrices el número de columnas de la primera matriz tiene que ser igual al número de filas de la segunda matriz. En este caso la matriz inversa tiene 2 columnas y la matriz de independientes tiene 2 filas, entonces sí se puede realizar la multiplicación. Simplificamos la matriz obtenida. | $$X = \begin{pmatrix} 3/7 & 1/7 \\ -1/7 & 2/7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$ $$X = \begin{pmatrix} 2 * \frac{3}{7} + \frac{1}{7} * 8 \\ -\frac{1}{7} * 2 + \frac{2}{7} * 8 \end{pmatrix}$$ $$X = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} + \frac{8}{7} \\ -\frac{2}{7} + \frac{16}{7} \end{pmatrix}$$ $$X = \begin{pmatrix} \frac{14}{7} \\ \frac{14}{7} \end{pmatrix}$$ |

**R// La solución del sistema: X=2 y Y=2.**

A) $\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}-1}}{x}dx$

| No. | Explicación | Operatoria |
|---|---|---|
| **1** | Reescribimos la integral de la siguiente manera sabiendo que: $$\sqrt{x} = x^{1/2}$$ Y sabiendo también que: $$x = x^{1/2} * x^{1/2}$$ | $$\int \frac{\sqrt{x^{1/2}-1}}{x^{1/2} * x^{1/2}} dx$$ |
| **2** | Realizamos la sustitución siguiente: $$z = x^{1/2}$$ Y derivamos **z** para realizar la sustitución del diferencial. | $$d(z) = d(x^{1/2})$$ $$dz = \frac{1}{2}x^{-1/2}\,dx$$ $$2dz = \frac{dx}{x^{1/2}}$$ |
| **3** | Realizamos la sustitución de z y la del diferencial en la integral del paso 1. | $$\int \frac{\sqrt{x^{1/2}-1}}{x^{1/2} * x^{1/2}} dx = \int \frac{\sqrt{z-1}}{z} 2dz$$ |
| **4** | Ya que: $$\frac{\sqrt{z-1}}{\sqrt{z-1}} = 1$$ Y multiplicar por uno cualquier cosa no cambia el resultado reescribimos la integral del paso multiplicando la integral por 1. | $$2\int \frac{\sqrt{z-1}}{z} * \frac{\sqrt{z-1}}{\sqrt{z-1}} dz$$ |
| **5** | Realizamos una segunda sustitución: $$s = \sqrt{z-1} = (z-1)^{1/2}$$ $$s^2 = z-1$$ $$s^2+1 = z$$ Y derivamos **s** para realizar la sustitución del diferencial. Simplificamos el resultado | $$d(s) = d((z-1)^{1/2})$$ $$ds = \frac{1}{2}(z-1)^{-1/2}dz$$ $$2ds = \frac{1}{\sqrt{z-1}}dz$$ |
| **6** | Sustituimos **s** y el diferencial en la integral del paso 4. | $$2\int \frac{\sqrt{z-1}}{z} \frac{\sqrt{z-1}}{\sqrt{z-1}} dz$$ $$= 2\int \frac{s * s}{s^2+1}\, 2ds$$ |

| | | |
|---|---|---|
| **7** | Simplificamos la integral del paso 6 | $2\int \frac{s*s}{s^2+1}\,2ds = 2*2\int \frac{s^2}{s^2+1}\,ds$ <br> $= 4\int \frac{s^2}{s^2+1}\,ds$ |
| **8** | Como el coeficiente del numerador de la integral es igual al del denominador podemos simplificar la división. | $4\int \frac{s^2}{s^2+1}\,ds = 4\int 1-\frac{1}{s^2+1}\,ds$ |
| **9** | Ahora integramos, sabiendo que la $\int 1ds = s$ y <br> $\int \frac{1}{s^2+1}ds = \tan^{-1} s$ <br> Simplificamos el resultado. | $4\int 1-\frac{1}{s^2+1}\,ds = 4(s-\tan^{-1} s)$ <br> $4(s-\tan^{-1} s) = 4s - 4\tan^{-1} s$ |
| **10** | Realizamos la sustitución de <br> $s=\sqrt{z-1}$ <br> En los dos términos calculados en el paso 9. | $4s = 4\sqrt{z-1}$ <br> $-4\tan^{-1} s = -4\tan^{-1}\sqrt{z-1}$ |
| **11** | Ahora realizamos la última sustitución <br> $z = x^{1/2}$ <br> Para ambos términos del paso 10. | $4\sqrt{z-1} = 4\sqrt{x^{1/2}-1}$ <br> $-4\tan^{-1}\sqrt{z-1}$ <br> $= -4\tan^{-1}\sqrt{x^{1/2}-1}$ |

**R//** $\boldsymbol{\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}-1}}{x}dx = 4\sqrt{x^{1/2}-1} - 4\tan^{-1}\sqrt{x^{1/2}-1}}$

B) $$\int_{-1}^{\infty} \frac{x}{\left(x^2+1\right)^{3/2}}\,dx$$

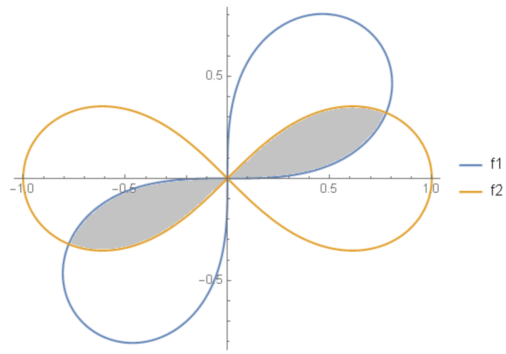
| No. | Explicación | Operatoria |
|---|---|---|
| **1** | Ya que es una integral impropia reescribimos la integral. | $\int_{-1}^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}dx$ <br> $= \lim_{a\to\infty}\int_{-1}^{a} \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}dx$ |
| **2** | Resolvemos la integral utilizando una sustitución: <br> $u = x^2+1$ <br> Y calculamos el diferencial: | $d(u) = d(x^2+1)$ <br> $du = 2x\,dx$ <br> $\frac{du}{2} = xdx$ |

| | | |
|---|---|---|
| **3** | Con el diferencial y la sustitución reescribimos la integral original. | $\int \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}} dx = \int \frac{1}{u^{3/2}} \frac{du}{2}$ |
| **4** | Resolviendo la integral y simplificando el resultado: | $\int \frac{1}{u^{3/2}} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \frac{(u^{-\frac{1}{2}})}{(-1/2)}$ <br> $-\frac{1}{2}(2)\left(u^{-\frac{1}{2}}\right) = -u^{-1/2}$ |
| **5** | Sustituyendo: $u = x^2 + 1$ | $-u^{-\frac{1}{2}} = -(x^2+1)^{-1/2}$ |
| **6** | Evaluando el resultado de la integral en la integral inicial tenemos: | $\lim_{a\to\infty} \int_{-1}^{a} \frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} dx =$ <br> $\lim_{a\to\infty} -(x^2+1)^{-1/2}\vert_{-1}^{a}$ |
| **7** | Evaluamos los límites de la Integral | $\lim_{a\to\infty} -(a^2+1)^{-1/2} -$ <br> $(-((-1)^2+1)$ |
| **8** | Simplificamos la expresión del paso 7 elevando la potencia de -1. | $\lim_{a\to\infty} -(a^2+1)^{-1/2} -$ <br> $(-(1+1)^{-1/2})$ |
| **9** | Simplificamos la expresión | $\lim_{a\to\infty} -(a^2+1)^{-1/2} + 2^{-1/2}$ |
| **10** | Dado que el límite <br> $\lim_{a\to\infty} -\frac{1}{4}(a^2+1)^{-\frac{1}{2}} = 0$ | $0 + 2^{-1/2}$ |
| **11** | Simplificando la respuesta y por último la aplicamos racionalización. | $2^{-1/2} = \frac{1}{2^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ <br> $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} * \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ |

**R//** $\int_{-1}^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}} dx = \frac{\sqrt{2}}{2}$

A) Plantee la o las integrales que calculen

i) Área dentro de $r^2 = sen2\theta$ y fuera de $r^2 = \cos 2\theta$

| **No.** | **Explicación** | **Operatoria** |
|---|---|---|
| **1** | Graficamos ambas curvas para observar el área de intersección a calcular. | <br> |
| **2** | Calculamos los puntos de intersección igualando ambas ecuaciones. | $\sin 2\theta = \cos 2\theta$ |
| **3** | Multiplicamos ambos lados por $\frac{1}{\cos 2\theta}$ | $\frac{1}{\cos 2\theta}\sin 2\theta = \cos 2\theta \frac{1}{\cos 2\theta}$ |
| **4** | Simplificamos la expresión del paso 3 sabiendo que $$\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \tan 2\theta$$ Y $$\frac{\cos 2\theta}{\cos 2\theta} = 1$$ | $\frac{1}{\cos 2\theta}\sin 2\theta = \cos 2\theta \frac{1}{\cos 2\theta}$<br>$\tan 2\theta = 1$ |
| **5** | Al evaluar la tangente inversa en ambos lados de la ecuación encontramos el primer valor dónde se intersecan las curvas. | $\tan^{-1}(\tan 2\theta) = \tan^{-1} 1$<br>$2\theta = \frac{\pi}{4}$<br>$\theta = \frac{\pi}{8}$ |
| **6** | La integral para calcular el área en una curva polar es: | $A = \frac{1}{2}\int_a^b r_2^2 - r_1^2\, d\theta$ |
| **7** | Encontrados los puntos podemos plantear la integral con f1 de 0 a $\pi/8$ y f2 $\pi/8$ a $\pi/2$.<br>Y por simetría podemos calcular la integral por dos. | $2\left(\frac{1}{2}\right)\int_{\pi/8}^{\pi/2} \sin 2\theta - \cos 2\theta\, d\theta$ |
| **8** | Simplificamos la integral planteada:<br>Dos por un medio es igual a uno. | $\int_{\pi/8}^{\pi/2} \sin 2\theta - \cos 2\theta\, d\theta$ |

| **R// El área dentro de $r^2 = \sin 2\theta$ y fuera de $r^2 = \cos 2\theta$ se calcula con la integral:** $$\int_{\pi/8}^{\pi/2} \sin 2\theta - \cos 2\theta \, d\theta$$ |
|---|

ii) Longitud del arco que limita la región común (ó área de intersección) entre ambas curvas polares.

| No. | Explicación | Operatoria |
|---|---|---|
| **1** | Para calcular la longitud de arco sobre una gráfica utilizamos la siguiente integral: | $L = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} \, d\theta$ |
| **2** | Para la primera curva con los puntos que se calculó en el ejercicio anterior $r^2 = \sin 2\theta$, calculamos la derivada $\frac{dr}{d\theta}$ | $\frac{d}{d\theta} r^2 = \frac{d}{d\theta} \sin 2\theta$ |
| **3** | La derivada es: | $\frac{d}{d\theta} r^2 = 2r \frac{dr}{d\theta}$ <br> $\frac{d}{d\theta} \sin 2\theta = 2\cos 2\theta$ |
| **4** | Sustituyendo el resultado del paso 3 en la ecuación del paso 2 | $2r \frac{dr}{d\theta} = 2\cos 2\theta$ |
| **5** | Simplificando la derivada del paso 4: | $\frac{dr}{d\theta} = \frac{2\cos 2\theta}{2r}$ <br> $\frac{dr}{d\theta} = \frac{\cos 2\theta}{r}$ |
| **6** | Dado que $r^2 = \sin 2\theta$ entonces $r = \sqrt{\sin 2\theta}$ | $\frac{dr}{d\theta} = \frac{\cos 2\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}}$ |
| **7** | Para $r^2 = \cos 2\theta$ | $\frac{d}{d\theta} r^2 = \frac{d}{d\theta} \cos 2\theta$ |
| **8** | La derivada del paso 7 | $\frac{dr}{d\theta} = \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$ |
| **9** | Sustituyendo en la ecuación del paso 1: | $\int_0^{\pi/8} \sqrt{\sin 2\theta + \left(\frac{\cos 2\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}}\right)^2} \, d\theta$ |
| **10** | Para la segunda integral | $\int_{\pi/8}^{\pi/2} \sqrt{\cos 2\theta + \left(\frac{\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\right)^2} \, d\theta$ |

**R// La longitud del arco del área común de las curvas se calcula mediante las integrales:**

$$\int_0^{\pi/8} \sqrt{\sin 2\theta + \left(\frac{\cos 2\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}}\right)^2}\, d\theta + \int_{\pi/8}^{\pi/2} \sqrt{\cos 2\theta + \left(\frac{\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\right)^2}\, d\theta$$

B) Dadas las ecuaciones paramétricas

$x(t) = 4sent \qquad y(t) = 3\cos t$

i) Obtenga la ecuación cartesiana

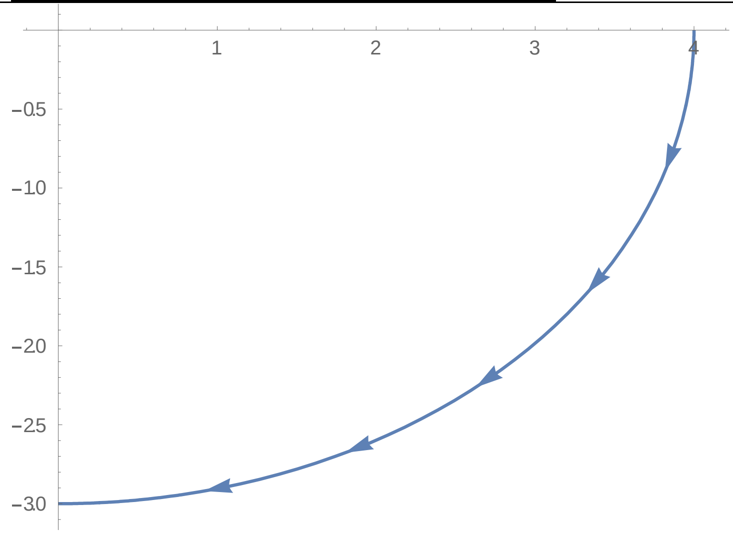
| No. | Explicación | Operatoria |
|---|---|---|
| **1** | Sabemos que: $$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$ Por lo que para poder sustituir **y** en términos de **x** debemos despejar su ecuación paramétrica en términos de Seno. | $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$ |
| **2** | Calculamos la raíz cuadrada de ambos lados de la ecuación para poder despejar Coseno. | $\sqrt{\cos^2 t} = \sqrt{1 - \sin^2 t}$ |
| **3** | Simplificando la ecuación del paso número 2 | $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t}$ |
| **4** | Sustituimos el resultado del paso anterior en la ecuación de **y** dado que: $$y(t) = 3\cos t$$ Y $$\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t}$$ | $y(t) = 3\sqrt{1 - \sin^2 t}$ |
| **5** | Ahora sustituimos **x** en **y** ya que ambas están en términos de Seno. $$y(t) = 3\sqrt{1 - \sin^2 t}$$ Y $$x(t) = 4\sin t$$ | $\frac{x}{4} = \sin t$ |
| **6** | La ecuación de **y** en términos de **x** es: | $y = 3\sqrt{1 - \left(\frac{x}{4}\right)^2}$ |
| **7** | Simplificamos la expresión dividiendo ambos lados multiplicando por 1/3. | $\left(\frac{1}{3}\right) y = 3\sqrt{1 - \left(\frac{x}{4}\right)^2}\left(\frac{1}{3}\right)$ |
| **8** | El resultado de la ecuación del paso 7: | $\frac{y}{3} = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{4}\right)^2}$ |
| **9** | Elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación: | $\left(\frac{y}{3}\right)^2 = \left(\sqrt{1 - \left(\frac{x}{4}\right)^2}\right)^2$ |

| | | |
|---|---|---|
| **10** | Simplificamos la expresión del paso anterior: | $\left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1 - \left(\frac{x}{4}\right)^2$ |
| **11** | Dejamos las variables solamente de un lado de la expresión. | $\left(\frac{y}{3}\right)^2 + \left(\frac{x}{4}\right)^2 = 1$ |

**R// La ecuación cartesiana en base a las ecuaciones paramétricas dadas es:**

$$\left(\frac{y}{3}\right)^2 + \left(\frac{x}{4}\right)^2 = 1$$

**ii)** La grafica con su dirección para $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$

<table>
<tr><th>No.</th><th>Explicación</th><th>Operatoria</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Evaluamos puntos de $\frac{\pi}{2}$ a $\pi$ para obtener coordenadas de x y y:</td><td>
<table>
<tr><th>$\boldsymbol{\theta}$</th><th>$\boldsymbol{x(t) = 4\sin t}$</th><th>$\boldsymbol{y(t) = 3\cos t}$</th></tr>
<tr><td>$\frac{\pi}{2}$</td><td>4</td><td>0</td></tr>
<tr><td>$\frac{5\pi}{8}$</td><td>3.6955</td><td>-1.1480</td></tr>
<tr><td>$\frac{3\pi}{4}$</td><td>2.8284</td><td>-2.1213</td></tr>
<tr><td>$\pi$</td><td>0</td><td>-3</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Por los valores del paso anterior observamos que el punto inicial es (4,0) y finaliza en (0,-3).<br><br>La gráfica resultante es:</td><td>
</td></tr>
</table>

**iii)** Plantee la integral que calcule el área generada al girar el segmento respecto del eje y. (***en paramétricas***)

| **No.** | **Explicación** | **Operatoria** |
|---|---|---|
| **1** | Para calcular el área en paramétricas utilizamos la fórmula | $\int_a^b 2\pi x \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$ |
| **2** | Calculamos $\frac{dx}{dt}$ | $\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(4\sin t)$ <br> $\frac{dx}{dt} = 4\cos t$ |
| **3** | Calculamos $\frac{dy}{dt}$ | $\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} 3\cos t$ <br> $\frac{dy}{dt} = -3\sin t$ |
| **4** | Sustituyendo en la ecuación del paso 1 | $\int_{\pi/2}^{\pi} 2\pi(4\sin t)\sqrt{(4\cos t)^2 + (-3\sin t)^2} dt$ |
| **5** | Simplificando la integral del paso 4 | $\int_{\pi/2}^{\pi} 8\pi \sin t \sqrt{16\cos^2 t + 9\sin^2 t}\, dt$ |

**R// El área que resulta al girar el segmento respecto del eje y se calcula mediante la integral:**

$$\int_{\pi/2}^{\pi} 8\pi \sin t \sqrt{16\cos^2 t + 9\sin^2 t}\, dt$$

A) Obtenga una ***sucesión*** que represente la sucesión de términos: $2,8,2,8,2,8,,,,\{a_n\}$

| **No.** | **Explicación** | **Operatoria** |
|---|---|---|
| **1** | Observamos un patrón en la sucesión: Si empieza con 5 para el siguiente valor se deben restar 3 para obtener el primer valor de la sucesión. | $5 - 3, \ldots$ <br> $2, \ldots$ |
| **2** | Para obtener el valor de 8 debemos sumar 3 al valor inicial. | $2, 5 + 3$ <br> $2, 8, \ldots$ |
| **3** | Observamos que para cada valor de la sucesión hay que alternar un 3 positivo y luego uno negativo para realizar la suma con el valor inicial, cinco. | $a_n = 2,8,2,8, \ldots = 5 + 3(-1)^n$ |

| **R// La sucesión de los términos** $\{2,8,2,8,2,8,\ldots\}$ **es** $a_n = 5 + 3(-1)^n$ |
|---|

B) Determine si la ***sucesión*** $\left\{\dfrac{3^n+1}{3^n}\right\}$ y si la **serie** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n+1}{3^n}$ convergen o divergen

| **No.** | **Explicación** | **Operatoria** |
|---|---|---|
| **1** | Para determinar si la sucesión $\{a_n\}$ evaluamos el límite $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ | $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n+1}{3^n}$ |
| **2** | Para evaluar el límite realizamos la división del paso anterior, ya que tienen un común divisor podemos separar la operación en dos divisiones equivalentes: | $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n+1}{3^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n}{3^n} + \dfrac{1}{3^n}$ |
| **3** | Simplificamos el resultado anterior sabiendo que $\frac{3^n}{3^n} = 1$ | $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n}{3^n} + \dfrac{1}{3^n} = \lim\limits_{n\to\infty} 1 + \dfrac{1}{3^n}$ |
| **4** | Dado que el límite $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$ | $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \dfrac{1}{3^n} = 1 + 0 = 1$ |
| **5** | Por la prueba del límite, si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ la serie diverge.<br><br>En este caso calculamos el límite en los pasos del 1 al 4 y el límite tiende a 1 por lo que la serie diverge. | $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n+1}{3^n} = 1$ |

| **R// La sucesión** $\left\{\frac{3^n+1}{3^n}\right\}$ **converge y** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n+1}{3^n}$ **diverge.** |
|---|

C) Determine centro, radio e intervalo de convergencia abierto para $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!\,(2x)^n$

| **No.** | **Explicación** | **Operatoria** |
|---|---|---|
| **1** | Realizamos la prueba de proporciones $\lim\limits_{n\to\infty} \left\lvert\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\rvert$ | $\lim\limits_{n\to\infty} \left\lvert\dfrac{(n+1)!\,(2x)^{n+1}}{n!\,(2x)^n}\right\rvert$ |

| | | |
|---|---|---|
| **2** | Por propiedades de los exponentes, una división de igual base, se copia la base y se restan los exponentes | $\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{(n+1)!}{n!}(2x)^{n+1-n}\right\|$ |
| **3** | Simplificamos el paso anterior, ya que **n** menos **n** es 0 y una base elevada a la 1 sigue siendo la misma base: | $\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{(n+1)!}{n!}(2x)\right\|$ |
| **4** | Por la definición de factorial $x! = x(x-1)!$ , si decimos que $x = n+1$ entonces | $(n+1)! = (n+1)\big((n+1)-1\big)!$ |
| **5** | Simplificando la expresión del paso anterior | $(n+1)! = (n+1)n!$ |
| **6** | Hacemos la sustitución de la expresión del paso anterior en la expresión del paso 3: | $\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{(n+1)n!}{n!}(2x)\right\|$ |
| **7** | Dado que $\frac{n!}{n!} = 1$ | $\lim_{n\to\infty}(n+1)\|(2x)\|$ |
| **8** | El límite $\lim_{n\to\infty}(n+1)$ existe si $\|(2x)\| = 0$ o bien $x = 0$ | $\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\| = \begin{cases}\infty, x \neq 0\\ 0, x = 0\end{cases}$ |

**R// El centro es 0, el radio es 0 y el intervalo es {0}**

A) Dos planos paralelos se cortan por una recta en los puntos (2,-3,1) y (0,-5,5)

i) Obtenga la ecuación paramétrica de la recta

| No. | Explicación | Operatoria |
|---|---|---|
| **1** | La ecuación vectorial de una recta L está dada por $r = r_0 + tv$, dónde $r_n = (x_n - 0, y_n - 0, z_n - 0) =< x_n, y_n, z_n >$ $v = r_1 - r_0$ | $(x_0, y_0, z_0) = (2, -3,1)$ <br> $(x_1, y_1, z_1) = (0, -5,5)$ |
| **2** | Calculamos $r_0$ y $r_1$ | $r_0 =< 2, -3,1 >$ <br> $r_1 =< 0, -5,5 >$ |
| **3** | Calculamos $v = r_1 - r_0$ | $v =< 2-0, -3-(-5), 5-1 >$ <br> $v =< 2, -3+5,4 >$ <br> $v =< 2,2,4 >$ |

| | | |
|---|---|---|
| **4** | La ecuación de la recta está dada por: $r = r_0 + tv$ | $r =< 2, -3,1 > +t < 2,2,4 >$ |
| **5** | Desarrollando el producto de la ecuación anterior: | $r =< 2, -3,1 > +< 2t, 2t, 4t >$ |
| **6** | Sumamos cada componente de ambos vectores: | $r =< 2 + 2t, -3 + 2t, 1 + 4t >$ |
| **7** | Dado que $r =< x, y, z >$ entonces: | $x = 2 + 2t$<br>$y = -3 + 2t$<br>$z = 1 + 4t$ |

**R// Las ecuaciones paramétricas de la recta que cortan a dos planos paralelos son:**

$$x = 2 + 2t$$
$$y = -3 + 2t$$
$$z = 1 + 4t$$

ii) Si uno de los planos es $x + y - 2z = -3$ encuentre la ecuación del otro plano.

| No. | Explicación | Operatoria |
|---|---|---|
| **1** | Del plano $x + y - 2z = -3$ tiene la forma $ax + by + cz + d = 0$ con un vector normal $n = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$, por lo que podemos obtener el vector normal del plano | $x + y - 2z + 3 = 0$<br>$n = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ |
| **2** | Para encontrar la ecuación del plano a partir de un punto $(x_0, y_0, z_0)$ y un vector normal $n = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$ , utilizamos la ecuación $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ Con el primer punto (2,-3,1) | $1(x - 2) + 1(y - (-3)) - 2(z - 1) = 0$ |
| **3** | Simplificamos la ecuación del paso anterior, quitando los paréntesis al multiplicar las escalares y sumando los términos se obtiene el plano proporcionado. | $x - 2 + y + 3 - 2z + 2 = 0$<br>$x + y - 2z + 3 = 0$ |
| **4** | Ahora obtenemos el otro plano con el segundo punto, (0,-5,5); sabiendo que para que sea paralelo se debe cumplir la condición $n_1 = k\, n_2$ dónde $k$ es cualquier escalar distinto a cero, en este caso probaremos con 1. | $1(x - 0) + 1(y - (-5)) - 2(z - 5) = 0$ |

| | | |
|---|---|---|
| **5** | Simplificamos la ecuación del paso anterior | $x - 0 + y + 5 - 2z + 10 = 0$<br>$x + y - 2z + 15 = 0$ |

**R// La ecuación del segundo plano es** $x + y - 2z + 15$

iii) Determine si la recta es perpendicular a los 2 planos.

| No. | Explicación | Operatoria |
|---|---|---|
| **1** | Para que la recta sea perpendicular a los 2 planos el vector normal de los planos tiene que ser paralelo al vector director de la recta | $n_1 = kn_2$ |
| **2** | El vector normal es $n = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ y $v = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ | No existe un valor ***k*** para determinar $n_1 = kn_2$ por lo que las recta no es perpendicular a los planos. |

**R// La recta no es perpendicular a los dos planos.**

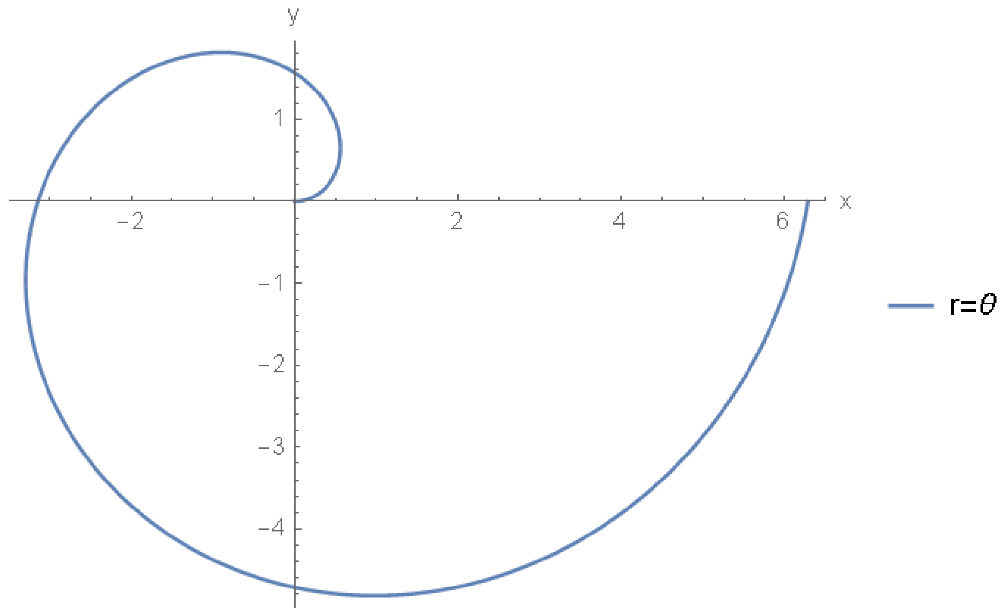
B) Dos rectas perpendiculares se cruzan entre sí en el punto (4,5,6). Si las rectas son paralelas al plano $x + y - 2z = -3$, ¿Determine la distancia perpendicular entre las rectas y el plano?

| No. | Explicación | Operatoria |
|---|---|---|
| **1** | Para obtener la distancia desde un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y un plano $ax + by + cz + d = 0$ se obtiene mediante la fórmula $D = \dfrac{\lvert ax_0 + by_0 + cz_0 + d\rvert}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ | $D = \dfrac{\lvert 4 + 5 - 2 * 6\rvert}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2}}$ |
| **2** | Simplificamos la expresión | $D = \dfrac{\lvert -3\rvert}{\sqrt{6}} = \dfrac{3}{\sqrt{6}}\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$ |
| **3** | La distancia es | $D = \dfrac{3\sqrt{6}}{6} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ |

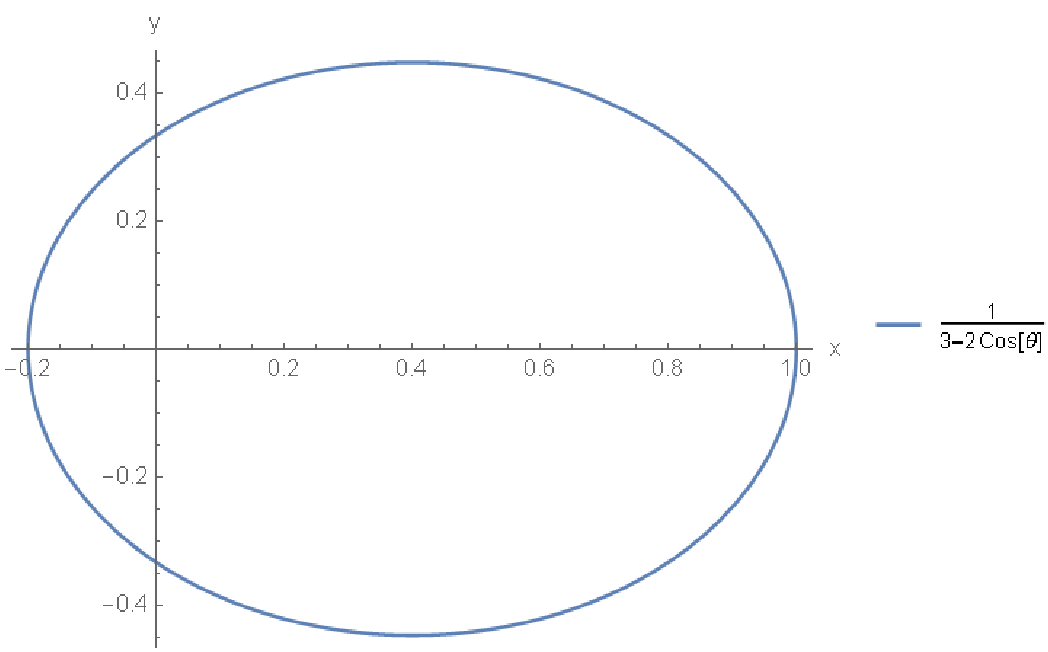
**R// La distancia entre las rectas y el plano es de** $\frac{\sqrt{6}}{2}$ **unidades.**

Identifique y obtenga la gráfica de las superficies en R3

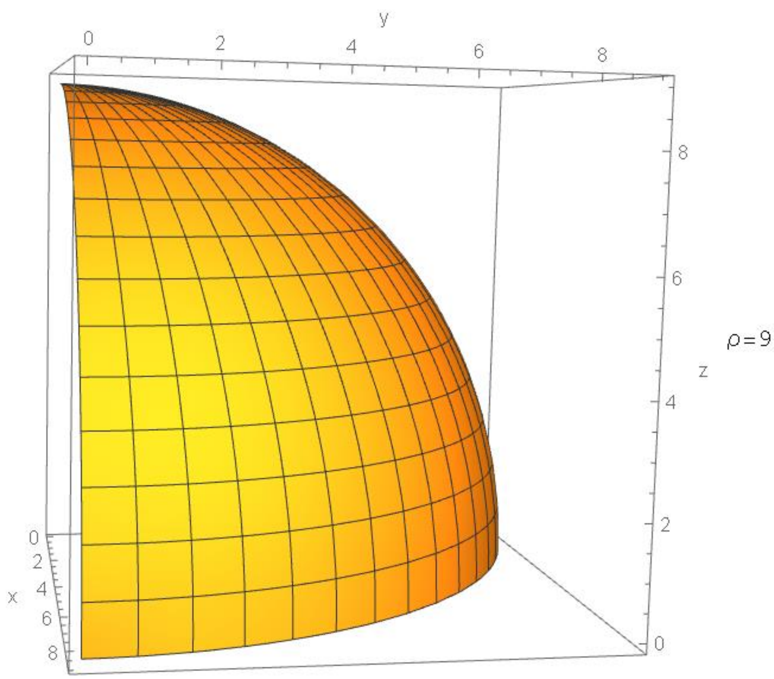
i) $r = \theta$ (si $0 \leq \theta \leq 2\pi$)




ii) $r = \dfrac{1}{3 - 2\cos\theta}$



iii) $\rho = 9$ (primer octante)




iv) $z^2 = r^2 + 1$