UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-112-1-M-1-00-2017

CURSO:	**Matemática Intermedia 2**
SEMESTRE:	**Primero**
CÓDIGO DEL CURSO:	**112**
TIPO DE EXAMEN:	**Primer Examen Parcial**
FECHA DE EXAMEN:	
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**María José Alburez**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Edgar Emilio Galindo**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

Universidad de San Carlos de Guatemala Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemática **MATEMÁTICA INTERMEDIA 2**

PRIMER EXAMEN PARCIAL

TEMARIO A

I Parte (15 puntos)

A continuación aparecen 3 preguntas, escriba únicamente su respuesta correcta en el cuadernillo.

1. ¿Cuál es el teorema que enuncia que las segundas derivadas parciales mixtas son iguales?
2. ¿Cuál es la función cuyo dominio es un conjunto de números reales y su rango un conjunto de vectores?
3. ¿Cuál es la parcial que se encuentra manteniendo fija a x y derivando $f(x,y)$ con respecto a y ?

II Parte (20 puntos)

A continuación aparecen 2 preguntas, escriba en su cuadernillo la literal que corresponde a la respuesta correcta. Use la última hoja de su cuadernillo para hacer sus cálculos.

1. El límite $\lim_{t\to 0}\left\langle \frac{t}{\sqrt[2]{1-t}}, e^t, \frac{t^2}{\cos t - 1}\right\rangle$ es:

$a.\ \langle 0,1,0\rangle$ $b.\ \langle 0,1,2\rangle$ $c.\ \langle 0,1,-2\rangle$ $d.$ NAC

2. El dominio de la función $r(t)=\left\langle \sqrt[2]{t-1}, e^t, \ln(6-t)\right\rangle$ es:

$a.\ [2,5)$ $b.\ [1,6]$ $c.\ [1,6)$ $d.$ NAC

III Parte (65 puntos)

A continuación aparecen 4 problemas, resuélvalos correctamente dejando constancia de sus procedimientos.

Problema 1 (15 puntos)

Dada la ecuación $r(t)=\langle t-2, t^2\rangle$ haga:

a) Dibuje la curva con ecuación vectorial dada.

b) Dibuje el vector de posición y el vector tangente en el punto $(-1,1)$

Problema 2 (15 puntos)

Determine la longitud de arco de la curva $r(t)=\left\langle t^2, \frac{4}{3}t^{3/2}, t\right\rangle$ en $0\le t\le 1.$

Problema 3 (15 puntos)

Encuentre la curvatura de $r(t)=\langle t^2, 2t, 1\rangle$ en $t=1.$

Problema 4 (20 puntos)

El costo de producir una revista es directamente proporcional al número de páginas que contiene e inversamente proporcional al cuadrado de número de fuentes que se citan. El costo de producir una revista de 100 páginas con 20 citas es de Q50. Use diferenciales para determinar el máximo error en el cálculo del costo, si se imprime una revista de 100 páginas con 20 citas y errores máximos de 5 páginas y 2 citas.

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

I Parte (15 puntos)

A continuación aparecen 3 preguntas, escriba únicamente su respuesta correcta en el cuadernillo.

1. ¿Cuál es el teorema que enuncia que las segundas derivadas parciales mixtas son iguales?
2. ¿Cuál es la función cuyo dominio es un conjunto de números reales y su rango un conjunto de vectores?
3. ¿Cuál es la parcial que se encuentra manteniendo fija a x y derivando $f(x,y)$ con respecto a y ?

No.	Explicación	Operatoria
1.	¿Cuál es el teorema que enuncia que las segundas derivadas parciales mixtas son iguales?	Teorema de Clairot
2.	**Teorema de Clairot:** Suponga que f se define en un disco D que contiene al punto (a,b). Si las funciones f_{xy} y f_{yx} son continuas en D, entonces	$f_{xy}\,(a,b) = f_{yx}(a,b)$
3.	¿Cuál es la función cuyo dominio es un conjunto de números reales y su rango un conjunto de vectores?	Función vectorial
4.	Una **función con valor vectorial**, o **función vectorial**, es una función cuyo dominio es un conjunto de números reales y cuyo rango es un conjunto de vectores.	$\mathrm{r(t)} = \langle f(t), g(t)\|, h(t)\rangle = f\,(t)\boldsymbol{i} + g\,(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$
5.	3. ¿Cuál es la parcial que se encuentra manteniendo fija a x y derivando $f(x,y)$ con respecto a y ?	$\frac{\partial F}{\partial y}$
6.	Reglas para calcular las derivadas parciales de $z = f(x,y)$ 1. Para hallar f_x, considere y como un constante y derive $f(x,y)$ con respecto de x. 2. Para hallar f_y, considere x como un constante y derive $f(x,y)$ con respecto de y.	

7.	Notaciones para derivadas parciales. Si $z = f(x, y)$, escribimos. $$f_x(x,y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$ $$f_y(x,y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$$

1. ¿Cuál es el teorema que enuncia que las segundas derivadas parciales mixtas son iguales?

   R//Teorema de Clairot

2. ¿Cuál es la función cuyo dominio es un conjunto de números reales y su rango un conjunto de vectores?

   R//Función vectorial

3. ¿Cuál es la parcial que se encuentra manteniendo fija a x y derivando f(x, y) con respecto a y?

   R// $\frac{\partial F}{\partial y}$

II Parte (20 puntos)

A continuación aparecen 2 preguntas, escriba en su cuadernillo la literal que corresponde a la respuesta correcta. Use la última hoja de su cuadernillo para hacer sus cálculos.

1. El límite $\lim_{t\to 0}\left\langle \frac{t}{\sqrt[2]{1-t}}, e^t, \frac{t^2}{\cos t-1}\right\rangle$ es:

a. $\langle 0,1,0\rangle$ *b.* $\langle 0,1,2\rangle$ *c.* $\langle 0,1,-2\rangle$ *d.* NAC

2. El dominio de la función $r(t)=\left\langle \sqrt[2]{t-1}, e^t, \ln(6-t)\right\rangle$ es:

a. $[2,5)$ *b.* $[1,6]$ *c.* $[1,6)$ *d.* NAC

No.	Explicación	Operatoria
1.	1. El límite $\lim_{t\to 0}\left\langle \frac{t}{\sqrt[2]{1-t}}, e^t, \frac{t^2}{\cos t-1}\right\rangle$ es:	c. $\langle 0,1,-2\rangle$
2.	El límite de una función vectorial r se define tomando los límites de sus funciones componentes como sigue.	$Si\ r(t)\ \langle f(t), g(t)\|, h(t)\rangle$, entonces $\lim_{t\to a} r(t) = \langle lim_{t\to a}\ f(t), lim_{t\to a} g(t), lim_{t\to a} h(t)\rangle$ en caso que existan los límites de las funciones componentes.
3.	De acuerdo con la definición 1, el límite de r es el vector cuyas componentes son los límites de las funciones componentes de r:	$\lim_{t\to 0} r(t) = \langle lim_{t\to 0}\ \frac{t}{\sqrt[2]{1-t}}, lim_{t\to 0} e^t, lim_{t\to 0} \frac{t^2}{\cos(t)-1}\rangle$
4.	Evaluando el límite en las funciones en $i\ y\ j$ obtenemos 0 y 1 respectivamente, mientras que para k, se aplica la Ley de L´Hopital encontramos que el límite es de -2.	$lim_{t\to 0}\ \frac{t}{\sqrt[2]{1-t}} = \frac{0}{\sqrt{1}} = 0$ $lim_{t\to 0}\ e^t = \ e^0 = 1$ $lim_{t\to 0} \frac{2}{-\cos(0)} = -2$
5.	2. El dominio de la función $r(t)=\left\langle \sqrt[2]{t-1}, e^t, \ln(6-t)\right\rangle$ es:	c. [1,6)
6.	En la función de la raíz cuadrada solo son permitidos números no negativos por tanto, mientras el exponente e son aceptados todos los	$\sqrt[2]{t-1}$

	números reales, y por último en el logaritmo únicamente se permiten los números positivos. Por tanto al tomar en cuenta el dominio de las funciones vectoriales obtenemos:	$t-1 \gg 0$ $t \gg 1$ $[1,\infty)$ e^t $(-\infty,\infty)$ $6-t>0$ $6>t$ [1,6)

R./

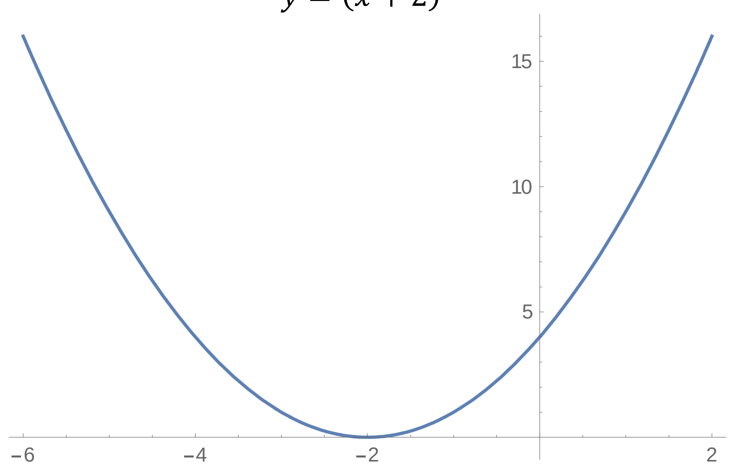
$$x_1 = 9\ ,\quad x_2 = 3$$

Problema 1 (15 puntos)

Dada la ecuación $r(t) = \langle t-2, t^2 \rangle$ haga:

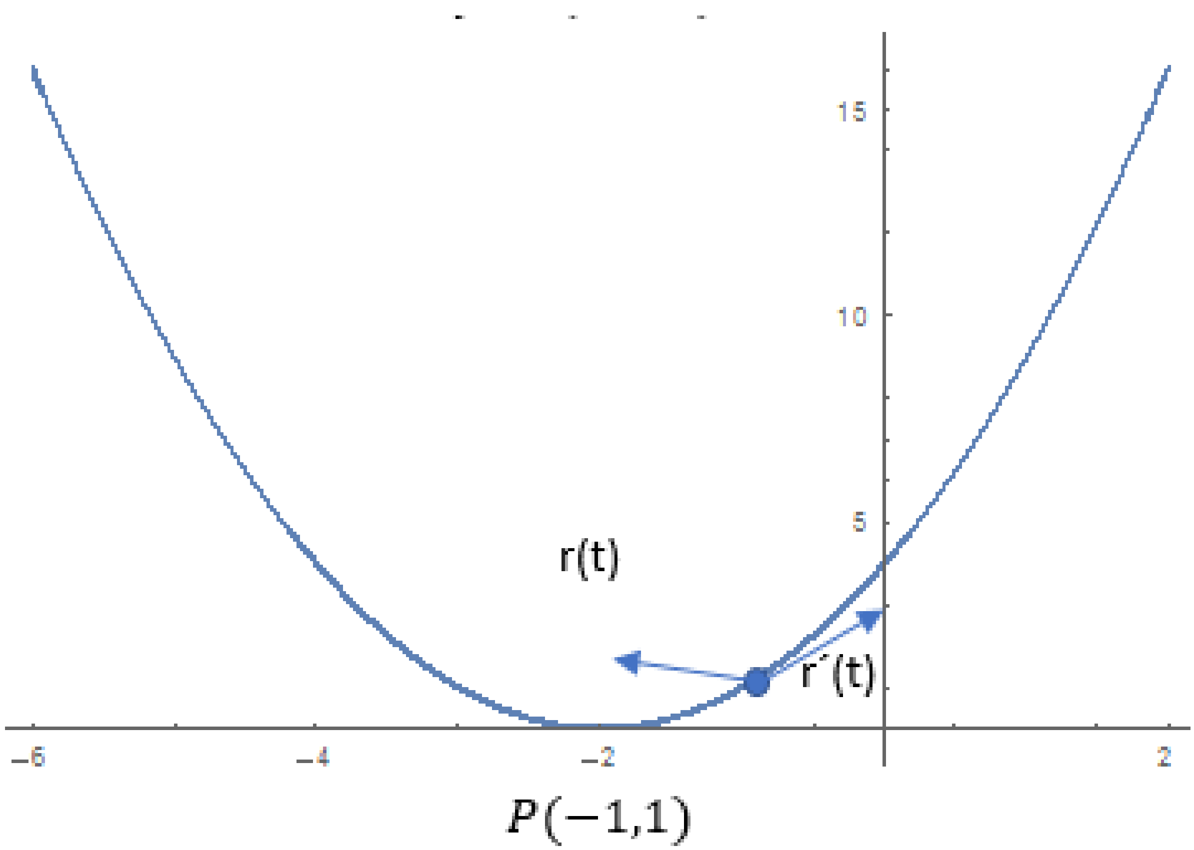
a) Dibuje la curva con ecuación vectorial dada.

b) Dibuje el vector de posición y el vector tangente en el punto $(-1,1)$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Las ecuaciones paramétricas correspondientes son:	$x = t - 2$ $y = t^2$
2.	Despejando el parámetro de las funciones vectoriales, se obtiene lo siguiente:	$t = x + 2$ $t = \sqrt{y}$
	Se igualan los parámetros t de ambas funciones y nos queda una función de y como variable independiente y x como variable dependiente.	$t = t$ $(x+2)^2 = (\sqrt{y})^2$ $y = (x+2)^2$ $y = (x+2)^2$ 

3.	La función vectorial y la derivada de la función vectorial evaluado en el punto P(-1,1) es:	$P(-1{,}1)$ $x = -1 \quad t = -1 + 2 = 1$ $r(1) = (1-2)i + (1)^2 j$ $r(1) = -i + j$ $r'(1) = i + 2j$

R./



Problema 2 (15 puntos)

Determine la longitud de arco de la curva $r(t)=\left\langle t^2, \frac{4}{3}t^{3/2}, t\right\rangle$ en $0 \le t \le 1$.

No	EXPLICACION	OPERATORIA
1	Se deriva la función vectorial $r(t)=\left\langle t^2, \frac{4}{3}t^{3/2}, t\right\rangle$	$r'(t) = \langle 2t, 2t^{\frac{1}{2}}, 1\rangle$
2	La longitud de una curva $x = f(t)$, y $y = g(t)$ y $z = h(t), a \ll t \ll b$como el limite de longitudes de los polígonos inscritos y, para el caso en que $f', g' y h'$sean continuas, llegamos a la siguiente formula	$L = \int_a^b \|r'(t)\|dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$
3	En base a dicha fórmula se obtiene la longitud de arco de la función vectorial $r(t)=\left\langle t^2, \frac{4}{3}t^{3/2}, t\right\rangle$ donde $0 \le t \le 1$.	$L = \int_a^b \sqrt{(2t)^2 + (2t^{1/2})^2 + (1)^2 dt}$ $L = \int_0^1 \sqrt{(2t+1)^2}dt = \int_0^1 (2t+1)dt = 1 + 1 = 2$

R/ La longitud de arco de la curva es de 2 unidades.

Problema 3 (15 puntos)

Encuentre la curvatura de $r(t)=\langle t^2, 2t, 1\rangle$ en $t=1$.

No.	Explicación	Operación
1	La curvatura está dada por la función vectorial $\boldsymbol{r}$ es	$\kappa(t)=\dfrac{\lvert r'(t)\ x\ r''(t)\rvert}{\lvert r'(t)\rvert^3}$
2	Encontrar la primera y segunda derivada de la función vectorial y evaluarla en t=1.	$r'(t)=2t\,i+2j \quad r'(1)=2\,i+2j$ $r''(t)=2i \quad r''(1)=2i$
3	Aplicar el producto cruz.	$r'(1)\ x\ r''(1)=\begin{matrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{matrix}=-4k$
4	Encontrar $\lvert r'(t)\rvert$	$\lvert r'(t)\rvert=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}$
5	Utilizando el teorema de la curvatura de una curva dada por la función vectorial r, obtenemos:	$\kappa(t)=\dfrac{\lvert r'(t)\ x\ r''(t)\rvert}{\lvert r'(t)\rvert^3}=\dfrac{\sqrt{(-4)^2}}{\left(\sqrt{8}\right)^3}=\dfrac{4}{8^{3/2}}$

R/La curvatura de $r(t)=\langle t^2, 2t, 1\rangle$ en t=1 es de $\dfrac{4}{8^{3/2}}$ unidades.

Problema 4 (20 puntos)

El costo de producir una revista es directamente proporcional al número de páginas que contiene e inversamente proporcional al cuadrado de número de fuentes que se citan. El costo de producir una revista de 100 páginas con 20 citas es de Q50. Use diferenciales para determinar el máximo error en el cálculo del costo, si se imprime una revista de 100 páginas con 20 citas y errores máximos de 5 páginas y 2 citas.

No.	Explicación	Operación
1	Identificación de variables, y plantear la función de costos.	X=páginas Y= fuentes C= costo $C=\alpha\frac{X}{Y^2}\rightarrow C=k\frac{X}{Y^2}$ $X=100$ $Y=20$ $C=50$
2	Con los datos de 100 páginas y 20 citas con valor de Q50. Encontrar el valor de la constante.	$k=\frac{CY^2}{X}=\frac{(50)(20)^2}{100}=200$ $C=200\frac{X}{Y^2}$
3	Utilice diferenciales para encontrar el error, derivando parcialmente en función de x y y	$dC=Cxdx+Cydy$ $dC=\frac{200}{Y^2}dx-\frac{400X}{Y^3}dy$
4	Evaluar la función con 100 páginas y 20 citas para encontrar el error máximo en el costo.	$dC=\frac{200}{(20)^2}(5)-\frac{400(100)}{(20)^3}(2)$ $dC=-7.5$

El máximo error en el cálculo del costo, si se imprime una revista de 100 páginas con 20 citas y errores máximos de 5 páginas y 2 citas, es de Q7.5