UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-112-1-V-1-00-2017

CURSO:	**Matemática Intermedia 2**
SEMESTRE:	**Primero**
CÓDIGO DEL CURSO:	**112**
TIPO DE EXAMEN:	**Primer Examen Parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**14 de febrero de 2017**
REVISÓ EL EXAMEN:	**Ing. Carlos Garrido**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**William Fernando Valladares Muñoz**
COORDINADOR:	**Ing. Vera Marroquín**

Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemática

Primer Examen Parcial Matemática Intermedia 2
Temario 63

<u>Tema No. 1</u> (20 puntos)

La arena que cae forma una pila cónica. Cuando la altura de la pila es de 5 pies y el radio de su base es de 2 pies, su altura se incrementa 0.4 pies/min y el radio de su base aumenta 0.7 pies/min. ¿A qué razón aumenta el volumen de la pila de arena en ese momento?

<u>Tema No. 2</u> (20 puntos)

Calcule la cantidad de metal de una lata cilíndrica cerrada de 10 cm. de alto y 4 cm. de diámetro, si el metal de la pared es de 0.05 cms de espesor y el metal de la tapa y el fondo es de 0.1 cms. de espesor.

<u>Tema No.3</u> (15 puntos)

Trace un mapa de contorno y la gráfica de la función $f(x, y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$.

<u>Tema No.4</u> (45 puntos)

a) Determine $r(t)$ si $r''(t) = -4\cos t\,\hat{\jmath} - 3\sin t\,\hat{k}$ & $r'(0) = 3\hat{k}$ $\quad r(0) = 4\hat{\jmath}$

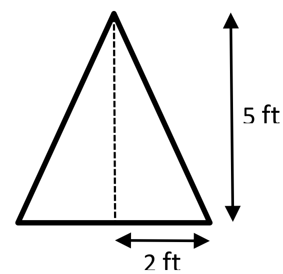
b) Hallar $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[(\sec t \tan t)\hat{\imath} + (\tan t)\hat{\jmath} + (2\sin t \cos t)\hat{k}\right] dt$

c) Encuentre la curvatura de la curva $r(t) = \; ti + \ln \cos t \;\, j$

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema No. 1 (20 puntos)

La arena que cae forma una pila cónica. Cuando la altura de la pila es de 5 pies y el radio de su base es de 2 pies, su altura se incrementa 0.4 pies/min y el radio de su base aumenta 0.7 pies/min. ¿A qué razón aumenta el volumen de la pila de arena en ese momento?

No.	Explicación	Operatoria
1.	Primero se procede a realizar un bosquejo de la arena que cae en forma cónica cuando la altura es de 5 pies y el radio de su base es de 2 pies.	 $h = 5 \;\; y \;\; r = 2$
2.	Se definen las razones de cambio de la altura y del radio de la base que nos brinda el problema respectivamente.	$\frac{dh}{dt} = 0.4 \; \frac{ft}{min}$ $\frac{dr}{dt} = 0.7 \; \frac{ft}{min}$
3.	Dado que el problema nos pide la razón en que aumenta el volumen, primero se debe definir su función correspondiente.	$\mathrm{V} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \quad (1)$
4.	Teniendo V ahora se procede a derivar parcialmente (1) respecto del tiempo t.	$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} + \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} \quad (2)$
5.	Al analizar a (2) se observa que ya tenemos los valores de $\frac{dh}{dt}$ y de $\frac{dr}{dt}$ pero no de $\frac{dV}{dh}$ ni de $\frac{dV}{dr}$, por lo tanto se procede a derivar parcialmente (1) respecto de la altura h y del radio r.	$\frac{dV}{dh} = \frac{\pi \cdot r^2}{3} \quad (3)$ $\frac{dV}{dr} = \frac{2\,\pi \cdot r \cdot h}{3} \quad (4)$
6.	Se procede a evaluar (3) con los valores de $h = 5 \;\; y \;\; r = 2$.	$\frac{dV}{dh} = \frac{\pi \cdot r^2}{3} = \frac{\pi \cdot (2)^2}{3} = \frac{4}{3}\pi$

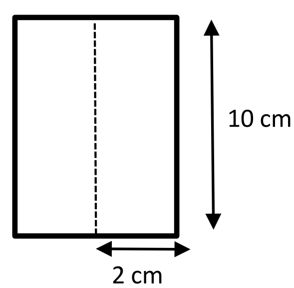
7.	Se procede a evaluar (4) con los valores de $h = 5 \ y \ r = 2$.	$$\frac{dV}{dr} = \frac{2\,\pi \cdot r \cdot h}{3} = \frac{2\,\pi \cdot (2) \cdot (5)}{3}$$ $$\frac{dV}{dr} = \frac{20}{3}\pi$$
8.	Teniendo todos los miembros de (2), ahora solo es cuestión de sustituir y operar.	$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} + \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$ $$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi \cdot 0.4 + \frac{20}{3}\pi \cdot 0.7$$ $$\frac{dV}{dt} = 16.34 \ \frac{ft^3}{min}$$

R./

El volumen de la pila aumenta a razón de $16.34 \ \frac{ft^3}{min}$.

<u>Tema No. 2</u> (20 puntos)

Calcule la cantidad de metal de una lata cilíndrica cerrada de 10 cm. de alto y 4 cm. de diámetro, si el metal de la pared es de 0.05 cms de espesor y el metal de la tapa y el fondo es de 0.1 cms. de espesor.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Primero se procede a realizar un bosquejo de la lata cilíndrica cerrada de 10 cm de alto y 4 cm de diámetro.	 $h = 10 \ y \ r = 2$
2.	Se definen los diferenciales de la pared y de las dos tapas que nos brinda el problema respectivamente.	$$dh = 0.1 * 2 = 0.2\ cm$$ $$dr = 0.05\ cm$$

3.	Dado que el problema nos pide la cantidad de metal de una lata cerrada, es decir el volumen parcial, primero se debe definir su función correspondiente.	$\mathrm{V} = \pi \cdot r^2 \cdot h \quad (1)$
4.	Teniendo V ahora se procede a obtener su diferencial correspondiente según (1).	$dV = \frac{dV}{dh} \cdot dh + \frac{dV}{dr} \cdot dr \quad (2)$
5.	Al analizar a (2) se observa que ya tenemos los valores de dh y de dr pero no de $\frac{dV}{dh}$ ni de $\frac{dV}{dr}$, por lo tanto se procede a derivar parcialmente (1) respecto de la altura h y del radio r.	$\frac{dV}{dh} = \pi \cdot r^2 \quad (3)$ $\frac{dV}{dr} = 2\,\pi \cdot r \cdot h \quad (4)$
6.	Se procede a evaluar (3) con los valores de $h = 10\ \ y\ \ r = 2.$	$\frac{dV}{dh} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (2)^2 = 4\pi$
7.	Se procede a evaluar (4) con los valores de $h = 10\ \ y\ \ r = 2.$	$\frac{dV}{dr} = 2\,\pi \cdot r \cdot h = 2\,\pi \cdot (2) \cdot (10)$ $\frac{dV}{dr} = 40\pi$
8.	Teniendo todos los miembros de (2), ahora solo es cuestión de sustituir y operar.	$dV = \frac{dV}{dh} \cdot dh + \frac{dV}{dr} \cdot dr$ $dV = 4\pi \cdot 0.2 + 40\pi \cdot 0.05$ $dV = 8.80\ cm^3$

R./
En la lata cilíndrica cerrada hay $8.80\ cm^3$ de metal.

<u>Tema No.3</u> (15 puntos)

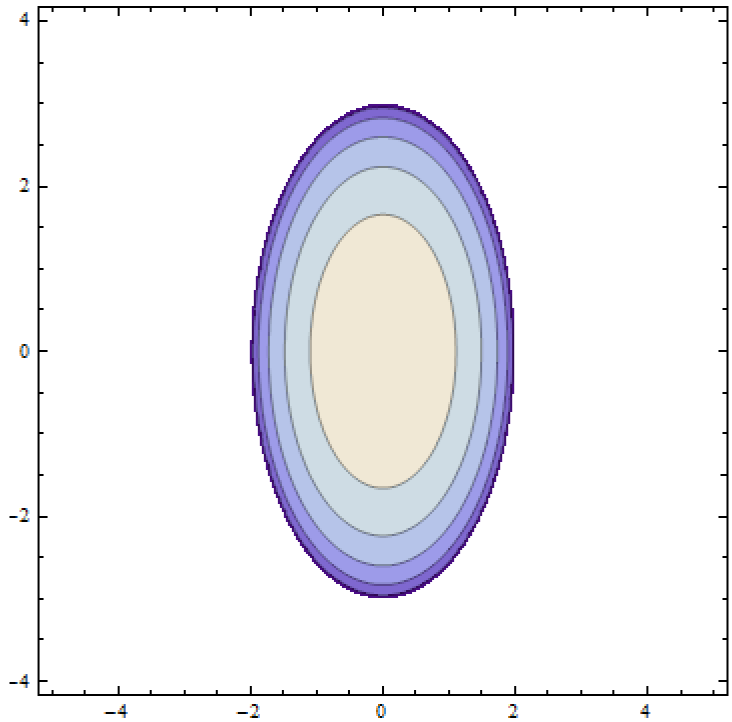
Trace un mapa de contorno y la gráfica de la función $f(x, y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Primero se iguala la función a una constante C formando una ecuación.	$C = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2} \quad (1)$

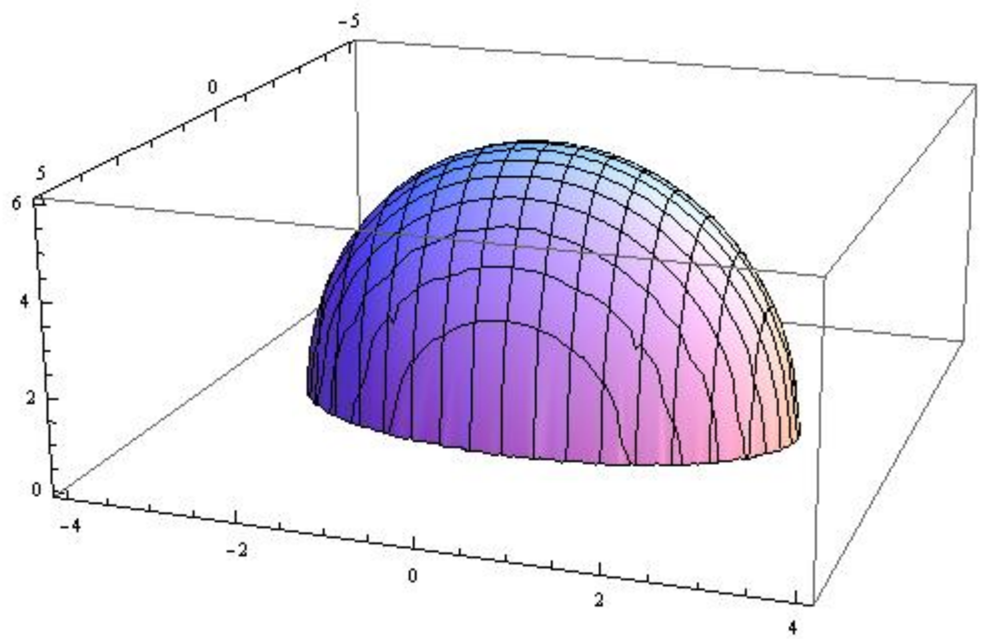
2.	Mediante álgebra se simplifica la ecuación (1) para saber si forma una ecuación representativa (cónica). Se puede observar que ella se asemeja a la representación canónica de una elipse.	$C^2 = 36 - 9x^2 - 4y^2$ $C^2 + 9x^2 + 4y^2 = 36$ $\frac{C^2}{36} + \frac{9x^2}{36} + \frac{4y^2}{36} = \frac{36}{36}$ $\frac{C^2}{36} + \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 - \frac{C^2}{36} \quad (2)$
3.	Se definen valores para C.	$\mathrm{C} = 0, 1, 2, 3, 4$
4.	Se procede a evaluar (2) con los valores de C, para así ir graficando cada una y completar el mapa de contorno.	$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 - \frac{0^2}{36} \quad (3)$ $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 - \frac{1^2}{36} \quad (4)$ $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 - \frac{2^2}{36} \quad (5)$ $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 - \frac{3^2}{36} \quad (6)$ $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 - \frac{4^2}{36} \quad (7)$
5.	Se procede a graficar las funciones (3) a la (7), formando de esta manera el mapa de contorno y con ella solo es cuestión de darle altura para apreciar la gráfica completa.	

R./

Mapa de Contorno



Gráfica



Tema No.4 (45 puntos)

a) Determine $r(t)$ si $r''(t) = -4\cos t\,\hat{\jmath} - 3\sin t\,\hat{k}$ & $r'(0) = 3\hat{k}$ $\quad r(0) = 4\hat{\jmath}$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Primero hay que observar qué información nos brinda el problema para determinar $r(t)$.	$r''(t) = -4\cos t\,\hat{\jmath} - 3\sin t\,\hat{k} \quad (1)$ $r'(0) = 3\hat{k} \quad (2)$ $r(0) = 4\hat{\jmath} \quad (3)$
2.	Integrando la ecuación (1) se puede obtener $r'(t)$.	$r'(t) = \int r''(t)\,dt$ $r'(t) = -4\int \cos t\,\hat{\jmath}\,dt - 3\int \sin t\,\hat{k}\,dt$ $r'(t) = -4\sin t\,\hat{\jmath} + 3\cos t\,\hat{k} + C \quad (4)$
3.	Se evalúa el valor inicial (2) en (4) y se obtiene el valor de C.	$3\hat{k} = -4\sin(0)\,\hat{\jmath} + 3\cos(0)\,\hat{k} + C$ $3\hat{k} = 3\hat{k} + C$ $C = 0 \quad (4)$
4.	Con el valor de C ya se obtiene $r'(t)$ completamente.	$r'(t) = -4\sin t\,\hat{\jmath} + 3\cos t\,\hat{k} \quad (5)$
5.	Integrando la ecuación (5) se puede obtener $r(t)$.	$r(t) = \int r'(t)\,dt$ $r(t) = -4\int \sin t\,\hat{\jmath}\,dt + 3\int \cos t\,\hat{k}\,dt$ $r(t) = 4\cos t\,\hat{\jmath} + 3\sin t\,\hat{k} + C \quad (6)$
6.	Se evalúa el valor inicial (3) en (6) y se obtiene el valor de C.	$4\hat{\jmath} = 4\cos(0)\,\hat{\jmath} + 3\sin(0)\,\hat{k} + C$ $4\hat{\jmath} = 4\hat{\jmath} + C$ $C = 0 \quad (7)$
7.	Con el valor de C ya se obtiene $r(t)$ completamente.	$r(t) = 4\cos t\,\hat{\jmath} + 3\sin t\,\hat{k}$

R./
$$\boldsymbol{r(t) = \ 4\cos t\,\hat{\jmath} + 3\sin t\,\hat{k}}$$

b) Hallar $\int_0^{\frac{\pi}{4}}[(\sec t \tan t)\hat{\imath} + (\tan t)\hat{\jmath} + (2\sin t\cos t)\hat{k}]dt$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se procede a realizar la integral indicada.	$\int_0^{\pi/4}[(\sec t \tan t)\hat{\imath} + (\tan t)\hat{\jmath} + (2\sin t\cos t)\hat{k}]dt$
2.	Se descompone la integral.	$\int_0^{\pi/4}(\sec t \tan t)\hat{\imath}\,dt + \int_0^{\pi/4}(\tan t)\hat{\jmath}\,dt + \int_0^{\pi/4}(2\sin t\cos t)\hat{k}\,dt$
3.	Se opera cada miembro.	$(\sec t\,\hat{\imath} - \ln\|\cos t\|\,\hat{\jmath} - \frac{1}{2}\cos 2t\,\hat{k}\,)\Big\|_0^{\pi/4}$
4.	Se evalúa cada miembro desde 0 hasta $\pi/4$.	$(\sqrt{2}+1)\hat{\imath} - \frac{\ln 2}{2}\,\hat{\jmath} - \frac{1}{2}\hat{k}$ $0.41\,\hat{\imath} + 0.35\,\hat{\jmath} + 0.50\,\hat{k}$

R./
$$\boldsymbol{0.41\,\hat{\imath} + 0.35\,\hat{\jmath} + 0.50\,\hat{k}}$$

c) Encuentre la curvatura de la curva $r(t) = \ t\hat{\imath} + \ln\cos t\,\hat{\jmath}$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se define la función $r(t)$ que nos brinda el problema.	$r(t) = \ t\hat{\imath} + \ln\cos t\,\hat{\jmath}$
2.	Ya que el problema nos pide la curvatura, se define la ecuación representativa.	$K = \frac{\|\,T'(t)\,\|}{\|r'(t)\|}$ $K = \frac{\|\,r'(t) \times r''(t)\,\|}{\|r'(t)\|^3} \quad (1)$
3.	Se procede a encontrar $r'(t)$ y $r''(t)$.	$r'(t) = \ \hat{\imath} - \tan t\,\hat{\jmath} \quad (2)$ $r''(t) = -sec^2\,t\,\hat{\jmath} \quad (3)$

4.	Usando (2) y (3) se realiza el producto vectorial $r'(t) \times r''(t)$.	$r'(t) \times r''(t) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & -\tan t & 0 \\ 0 & -sec^2 t & 0 \end{vmatrix}$ $r'(t) \times r''(t) = -sec^2 t\, \hat{k}$
5.	Se obtiene la magnitud de $r'(t) \times r''(t)$.	$\lvert r'(t) \times r''(t) \rvert = \sqrt{(-sec^2 t)^2}$ $\lvert r'(t) \times r''(t) \rvert = sec^2 t \quad (4)$
6.	Se obtiene la magnitud de $r'(t)$.	$r'(t) = \hat{\imath} - \tan t\, \hat{\jmath}$ $\lvert r'(t) \rvert = \sqrt{1 + (-\tan t)^2}$ $\lvert r'(t) \rvert = \sqrt{\sec^2 t}$ $\lvert r'(t) \rvert = \sec t \quad (5)$
7.	Utilizando (4) y (5) se evalúa (1).	$K = \frac{\lvert r'(t) \times r''(t) \rvert}{\lvert r'(t) \rvert^3}$ $K = \frac{sec^2 t}{sec^3 t} = \frac{1}{\sec t}$ $K = \cos t$

R./

$$\boldsymbol{K(t) = \cos t}$$