UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-112-1-V-2-00-2017

CURSO:	**Matemática Intermedia 2**
SEMESTRE:	**Segundo**
CÓDIGO DEL CURSO:	**112**
TIPO DE EXAMEN:	**Primer Examen Parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**9 de agosto de 2017**
REVISÓ EL EXAMEN:	**Ing. Carlos Garrido**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**William Fernando Valladares Muñoz**
COORDINADOR:	**Ing. Vera Marroquín**

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MATEMÁTICA INTERMEDIA 2

PRIMER EXAMEN PARCIAL

TEMA 1: (30 puntos). Dada la curva paramétrica

$r(t) = < \frac{t^3}{3}, t^2, 2t >$ **Encuentre:**

- **Las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva r(t) en el punto p(1/3,1,2)**
- **La longitud de arco desde el punto p(1/3,1,2) hasta el punto q(8/3,4,4)**
- **La curvatura en t=3**

TEMA 2: (20 puntos)

- **Si** $f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2-9}}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$ **Describa y grafique el dominio**
- **Para** $f(x,y) = \sqrt{y} - x$ **grafique un mapa de contorno con 3 curvas de nivel (k=0, 1, 2).**

TEMA 3: (20 puntos) Suponga que f=f(x, y) es una función derivable en X y en Y, y que $G(u,v) = f(2u^2+v^2, 2u^2-v^2)$. **Mediante la siguiente tabla calcule los valores de** $G_u(1,1)$ **y** $G_v(1,1)$**.**

N	f	G	f_x	f_y
(1,1)	1	3	1	1
(3,1)	3	323	1	3

TEMA 4: (30 puntos) si R es la resistencia total de dos resistores conectados en paralelo con resistencias R1 y R2. $\frac{1}{R} = \frac{1}{R1} + \frac{1}{R2}$**. Si las resistencias se miden en Ohms con R1=50Ω R2=100Ω con un error del 5% en cada caso. Estime el máximo error calculado de R.**

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

TEMA 1: (30 puntos). Dada la curva paramétrica

$r(t) =< \frac{t^3}{3}, t^2, 2t >$ **Encuentre:**

- **Las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva r(t) en el punto p(1/3,1,2)**

No.	Explicación	Operatoria
1.	Primero se procede a obtener el valor de t según el punto (1/3, 1, 2).	$\frac{t^3}{3} = \frac{1}{3} \rightarrow t^3 = \frac{3}{3} \rightarrow t = 1$ $t^2 = 1 \rightarrow t = 1$ $2t = 2 \rightarrow t = 1$ $t = 1 \quad (1)$
2.	Se obtiene r'(t).	$r'(t) =< t^2, 2t, 2 > \quad (2)$
3.	Se evalúa el vector (2) con (1).	$r'(1) =< 1,2,2 > \quad (3)$
4.	Se forman las ecuaciones paramétricas empleando el punto (1/3,1,2) y el vector (3).	$x = \frac{1}{3} + t$ $y = 1 + 2t$ $z = 2 + 2t$

R./

Las ecuaciones paramétricas respectivas son: $\boldsymbol{x = \frac{1}{3} + t,\ y = 1 + 2t,\ z = 2 + 2t.}$

- **La longitud de arco desde el punto p(1/3,1,2) hasta el punto q(8/3,4,4)**

No.	Explicación	Operatoria
1.	Ya que el problema nos pide la longitud de arco, se define la ecuación representativa.	$L = \int_a^b \lvert r'(t) \rvert dt$ $r'(t) =< t^2, 2t, 2 >$ $\lvert r'(t) \rvert = \sqrt{(t^2)^2 + (2t)^2 + (2)^2}$ $\lvert r'(t) \rvert = \sqrt{t^4 + 4t^2 + 4}$ $\lvert r'(t) \rvert = \sqrt{(t^2 + 2)^2} = (t^2 + 2)$ $L = \int_a^b (t^2 + 2)\, dt \quad (1)$
2.	El valor de “a” corresponde al de t según el punto (1/3, 1, 2).	$\frac{t^3}{3} = \frac{1}{3} \rightarrow t^3 = \frac{3}{3} \rightarrow t = 1$ $t^2 = 1 \rightarrow \ t = 1$ $2t = 2 \rightarrow t = 1$ $t = 1 \quad (2)$
3.	El valor de “b” corresponde al de t según el punto (8/3, 4, 4).	$\frac{t^3}{3} = \frac{8}{3} \rightarrow t^3 = 8 \rightarrow t = 2$ $t^2 = 4 \rightarrow \ t = 2$ $2t = 4 \rightarrow t = 2$ $t = 2 \quad (3)$
4.	Con los valores obtenidos de (2) y (3), se compone la ecuación de la longitud de arco.	$L = \int_1^2 (t^2 + 2)\, dt \quad (4)$
5.	Se resuelve la integral (4).	$L = \frac{13}{3} = 4.33\overline{3}$

R./

$$\boldsymbol{L = 4.33\overline{3}\ u}$$

- **La curvatura en t=3**

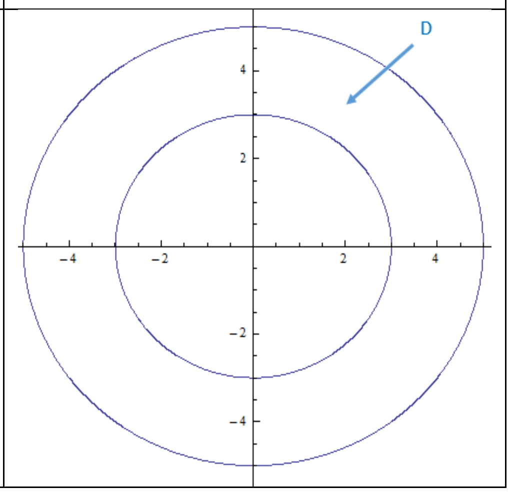
No.	**Explicación**	**Operatoria**
1.	Ya que el problema nos pide la curvatura, se define la ecuación representativa.	$K = \frac{\mid T'(t) \mid}{\lvert r'(t) \rvert}$ $K = \frac{\mid r'(t) \times r''(t) \mid}{\lvert r'(t) \rvert^3} \quad (1)$
2.	Se procede a encontrar $r'(3)$ y $r''(3)$.	$r'(t) =< t^2, 2t, 2 >$ $r'(3) =< 9,6,2 > \quad (2)$ $r''(t) =< 2t, 2,0 >$ $r''(3) =< 6,2,0 > \quad (3)$
3.	Usando (2) y (3) se realiza el producto vectorial $r'(3) \times r''(3)$.	$r'(3) \times r''(3) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 9 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ $r'(3) \times r''(3) =< -4,12,-18 >$
4.	Se obtiene la magnitud de $r'(3) \times r''(3)$.	$\lvert r'(3) \times r''(3) \rvert = \sqrt{(-4)^2 + 12^2 + (-18)^2}$ $\lvert r'(3) \times r''(3) \rvert = \sqrt{484}$ $\lvert r'(3) \times r''(3) \rvert = 22 \quad (4)$
5.	Se obtiene la magnitud de $r'(3)$.	$r'(3) =< 9,6,2 >$ $\lvert r'(3) \rvert = \sqrt{9^2 + 6^2 + 2^2}$ $\lvert r'(3) \rvert = \sqrt{121}$ $\lvert r'(t) \rvert = 11 \quad (5)$
6.	Utilizando (4) y (5) se evalúa (1).	$K = \frac{\mid r'(3) \times r''(3) \mid}{\lvert r'(3) \rvert^3}$ $K = \frac{22}{11^3} = \frac{2}{121}$ $K = 0.0165$

R./

$$\boldsymbol{K(3) = 0.0165u}$$

TEMA 2: (20 puntos)

- **Si** $f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2-9}}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$ **Describa y grafique el dominio**

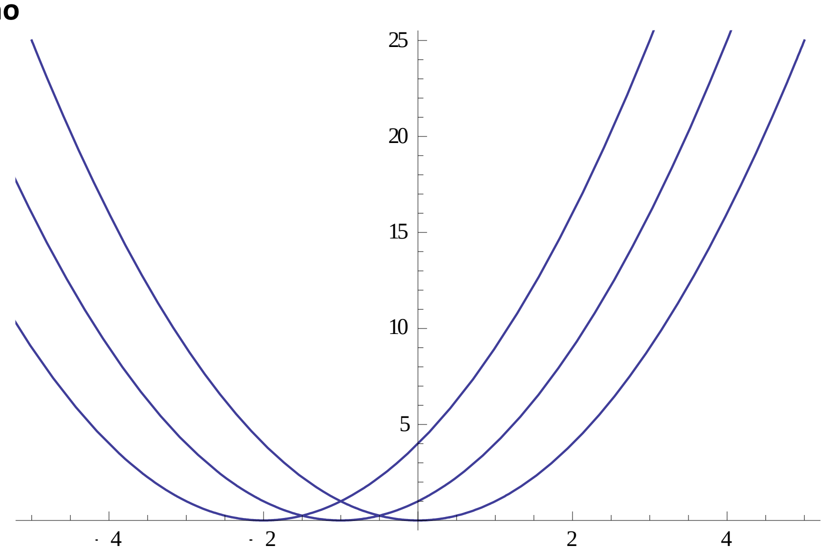
• No.	Explicación	Operatoria
1.	El dominio de f(x,y) está conformado por 2 circunferencias donde:	$x^2 + y^2 - 9 \geq 0$ $x^2 + y^2 = 9$ $25 - x^2 - y^2 > 0$ $x^2 + y^2 = 25$
2.	Se proceden a graficar dichas circunferencias:	

R./
El dominio de la función está limitado por el área entre dos circunferencias de radio 3 y 5 sin incluir el contorno del segundo.

- **Para $f(x,y) = \sqrt{y} - x$ grafique un mapa de contorno con 3 curvas de nivel (k=0, 1, 2).**

No.	Explicación	Operatoria
1.	Primero se iguala la función a una constante K formando una ecuación.	$K = \sqrt{y} - x \quad (1)$
2.	Mediante álgebra se simplifica la ecuación (1) para saber si forma una ecuación representativa (cónica). Se puede observar que ella se asemeja a la representación canónica de una parábola.	$K = \sqrt{y} - x$ $K + x = \sqrt{y}$ $(K + x)^2 = y$ $y = (x + K)^2 \quad (2)$
3.	Se definen valores para K.	$K = 0, 1, 2$
4.	Se procede a evaluar (2) con los valores de K, para así ir graficando cada una y completar el mapa de contorno empleando (3), (4) y (5).	$y = (x + 0)^2 \quad (3)$ $y = (x + 1)^2 \quad (4)$ $y = (x + 2)^2 \quad (5)$

R./
Mapa de Contorno



TEMA 3: (20 puntos) Suponga que f=f(x, y) es una función derivable en X y en Y, y que $G(u,v) = f(2u^2+v^2, 2u^2-v^2)$**. Mediante la siguiente tabla calcule los valores de** $G_u(1,1)$ **y** $G_v(1,1)$**.**

N	**f**	**G**	f_x	f_y
(1,1)	**1**	**3**	**1**	**1**
(3,1)	**3**	**323**	**1**	**3**

No.	**Explicación**	**Operatoria**
1.	Para obtener los valores de las derivadas parciales de G, es necesario emplear la regla de la cadena.	$\frac{d}{dt}g(f(t)) = \frac{dg}{df}\frac{df}{dt}$
2.	Haciendo uso de la regla de la cadena, se deriva parcialmente G_u	$G_u = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$ $G_u = (1)(4u) + (3)(4u)$ $G_u(1{,}1) = (1)\big(4(1)\big) + (3)\big(4(1)\big)$ $G_u(1{,}1) = 16$
3.	Haciendo uso de la regla de la cadena, se deriva parcialmente G_v	$G_v = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$ $G_u = (1)(2v) + (3)(-2v)$ $G_u(1{,}1) = (1)\big(2(1)\big) + (3)\big(-2(1)\big)$ $G_v(1{,}1) = -4$

R./

$$\boldsymbol{G_u(1,1) = 16} \quad \textbf{y} \quad \boldsymbol{G_v(1,1) = -4}$$

TEMA 4: (30 puntos) si R es la resistencia total de dos resistores conectados en paralelo con resistencias R1 y R2. $\frac{1}{R} = \frac{1}{R1} + \frac{1}{R2}$. Si las resistencias se miden en Ohms con R1=50Ω R2=100Ω con un error del 5% en cada caso. Estime el máximo error calculado de R.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Primero se define la ecuación para calcular R, los valores de $R1$ y $R2$, y sus diferenciales (5%).	$\frac{1}{R} = \frac{1}{R1} + \frac{1}{R2}$ $\frac{1}{R} = \frac{R2 + R1}{R1R2}$ $R = \frac{R1R2}{R2 + R1}$ $R1 = 50 \quad R2 = 100$ $dR1 = 2.5 \quad dR2 = 5$
2.	El máximo error de R corresponde a su diferencial dR. Por lo tanto se debe hacer uso de la regla de la cadena para derivarla.	$\frac{d}{dt} g(f(t)) = \frac{dg}{df} \frac{df}{dt}$
3.	Se deriva R.	$dR = \frac{dR}{dR1} dR1 + \frac{dR}{dR2} dR2$ $dR = \frac{(R2)^2}{(R1 + R2)^2} dR1 + \frac{(R1)^2}{(R1 + R2)^2} dR2$
4.	Se sustituyen valores y se obtiene el valor de dR.	$dR = \frac{(100)^2}{(50 + 100)^2}(2.5) + \frac{(50)^2}{(50 + 100)^2}(5)$ $dR = \frac{15}{9} = 1.66\bar{6}$

R./

El máximo error de R es $1.66\bar{6}\Omega$.