**UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA**

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

**CLAVE-112-2-V-2-00-2017**

| | |
|---|---|
| **CURSO:** | **Matemática Intermedia 2** |
| **SEMESTRE:** | **Segundo** |
| **CÓDIGO DEL CURSO:** | **112** |
| **TIPO DE EXAMEN:** | **Segundo Examen Parcial** |
| **FECHA DE EXAMEN:** | **19 de septiembre de 2017** |
| **REVISÓ EL EXAMEN:** | **Ing. Carlos Garrido** |
| **DIGITALIZÓ EL EXAMEN:** | **William Fernando Valladares Muñoz** |
| **COORDINADOR:** | **Ing. Vera Marroquín** |

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MATEMÁTICA INTERMEDIA 2
19 DE SEPTIEMBRE DE 2017

# SEGUNDO PARCIAL TEMARIO A

**INSTRUCCIONES**

- NO se permite el uso de teléfono durante el examen.
- Trabaje de forma clara y ordenada, dejando constancia de todo su procedimiento, de lo contrario no tendrá validez su respuesta.
- Para tener derecho a revisión sus respuestas deben estar escritas con lapicero.

## TEMA No. 1 (20 puntos)

Halle el volumen del sólido acotado por los planos:

$$\boldsymbol{z = 6 - x - y, \qquad y = x, \qquad y = 3, \qquad z = 0, \qquad x = 0}$$

## TEMA No. 2 (20 puntos)

La temperatura en el punto (X, Y) de una placa metálica es $\boldsymbol{T = \frac{x}{x^2+y^2}}$.

a. Halle la razón de cambio de la temperatura en la dirección que va del punto P (3, 4) al punto Q (-1, -2).
b. Cuál es la tasa de cambio de la temperatura en la dirección de mayor incremento de calor en el punto (3, 4).
c. Halle la dirección de mayor incremento de calor en el punto (3, 4).

## TEMA No. 3 (20 puntos)

Halle el valor del área de la región acotada por las rectas:

$$\boldsymbol{y + x = 2, \qquad y + x = 4, \qquad y = 2, \qquad y = 0.}$$

a) Utilizando el orden de integración $dxdy$
b) Utilizando el orden de integración $dydx$

## TEMA 4 (20 puntos)

Un contenedor (en forma de un sólido rectangular) debe tener un volumen de 480 pies cúbicos. Construir la base costará Q25 por pie cuadrado y construir los lados y la parte superior costará Q4 por pie cuadrado. Determine las dimensiones del contenedor de este tamaño que minimicen el costo.

## TEMA 5 (20 puntos)

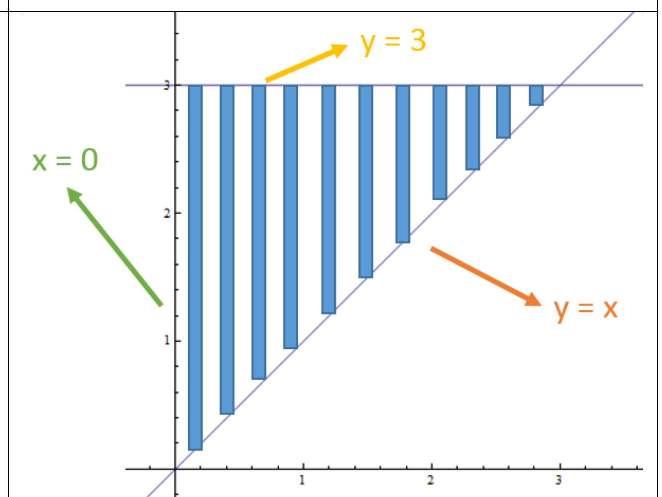
Utilice una integral doble en coordenadas polares para hallar el volumen del sólido interior al hemisferio $\boldsymbol{z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}}$ e interior al cilindro $\boldsymbol{x^2 + y^2 - 4x = 0}$.

# SOLUCIÓN DEL EXAMEN

## TEMA No. 1 (20 puntos)

Halle el volumen del sólido acotado por los planos:

$$\boldsymbol{z = 6 - x - y, \qquad y = x, \qquad y = 3, \qquad z = 0, \qquad x = 0}$$

| No. | Explicación | Operatoria |
|---|---|---|
| 1 | Primero se procede a realizar un corte en el plano XY haciendo z=0. | $z = 6 - x - y$<br>$6 - x - y = 0 \;\; (1)$ |
| 2 | Haciendo uso de (1) se define la integral de volumen correspondiente acotada en la región $R$. | $V = \iint (6 - x - y)dA$ |
| 3 | Donde $R$ está acotado por las ecuaciones proporcionadas. | $y = x \;\; (2)$<br>$y = 3 \;\; (3)$<br>$x = 0 \;\; (4)$ |
| 4 | En el orden de integración $dA = dydx$, se procede a integrar mediante columnas, en las cuales el diferencial $dy$ es variable respecto a $x$ y el diferencial $dx$ es constante. |  |
| 5 | Utilizando la gráfica anterior, se definen los valores en que varían $x$ y $y$. | $0 \leq x \leq 3 \;\; (5)$<br>$x \leq y \leq 3 \;\; (6)$ |
| 6 | Se utilizan los límites obtenidos de (5) y (6) para definir los límites de la integral doble. | $V = \int_0^3 \int_x^3 (6 - x - y)dydx$ |

| | | |
|---|---|---|
| 7 | Se resuelve la integral doble. | $V = \int_0^3 \int_x^3 (6 - x - y)dydx = \frac{27}{2} = 13.5$ |

**R./**

**El volumen es de 13.5 $u^3$.**

**TEMA No. 2 (20 puntos)**

La temperatura en el punto (X, Y) de una placa metálica es $\boldsymbol{T = \frac{x}{x^2+y^2}}$.

a. Halle la razón de cambio de la temperatura en la dirección que va del punto P (3, 4) al punto Q (-1, -2).

| No. | Explicación | Operatoria |
|---|---|---|
| 1. | Primero se procede a obtener el gradiente de la función $T$ y se evalúa en el punto P. | $\nabla T(x,y) =< T_x, T_y >$<br>$T_x = -\frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1}{x^2+y^2}$<br>$T_y = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$<br>$\nabla T(3,4) =< \frac{7}{625}, -\frac{24}{625} >$ |
| 2 | Luego se calcula un vector $v$ en la dirección que va del punto P al punto Q. | $v =< (-1)-3, (-2)-4 >$<br>$v = < -4, -6 >$<br>$\lvert v\rvert = \sqrt{(-4)^2+(-6)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ |
| 3 | Se obtiene un vector unitario basado en el vector $v$. | $u = \frac{v}{\lvert v\rvert}$<br>$u =< \frac{-4}{2\sqrt{13}}, \frac{-6}{2\sqrt{13}} >$ |
| 4 | Se efectúa un producto punto entre el gradiente en el punto P y el vector unitario $u$. | $< \frac{7}{625}, -\frac{24}{625} > \cdot < \frac{-4}{2\sqrt{13}}, \frac{-6}{2\sqrt{13}} > = \frac{58}{625\sqrt{13}}$<br>$\frac{58}{625\sqrt{13}} = 0.0257$ |

**R./**

**La razón de cambio es $\mathbf{0.0257}$.**

b. Cuál es la tasa de cambio de la temperatura en la dirección de mayor incremento de calor en el punto (3, 4).

| No. | Explicación | Operatoria |
|---|---|---|
| 1 | Se utiliza el cálculo resuelto en el inciso anterior. | $\nabla T(3,4) =< \frac{7}{625}, -\frac{24}{625} >$ |
| 2 | Se obtiene la magnitud del vector. | $\lvert T(3,4)\rvert = \sqrt{\left(\frac{7}{625}\right)^2 + \left(-\frac{24}{625}\right)^2} = \frac{1}{25} = 0.04$ |

**R./**

**La tasa de cambio es de $\mathbf{0.04}$.**

c. Halle la dirección de mayor incremento de calor en el punto (3, 4).

| No. | Explicación | Operatoria |
|---|---|---|
| 1. | Lo solicitado coincide con un cálculo previamente resuelto. | $\nabla T(3,4) =< \frac{7}{625}, -\frac{24}{625} >$ |

**R./**

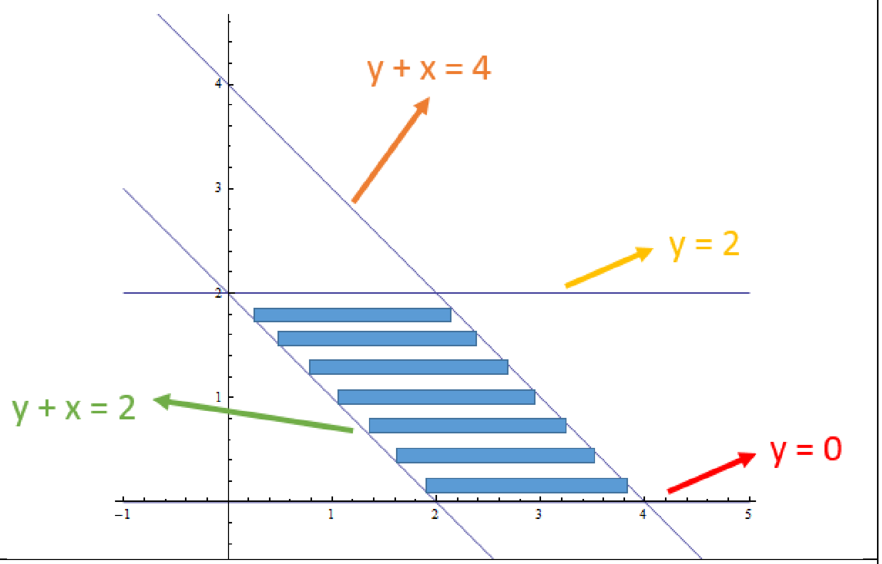
**La dirección es $< \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{625}}, -\frac{\mathbf{24}}{\mathbf{625}} >$.**

**TEMA No. 3 (20 puntos)**

Halle el valor del área de la región acotada por las rectas:

$$\boldsymbol{y + x = 2, \qquad y + x = 4, \qquad y = 2, \qquad y = 0.}$$

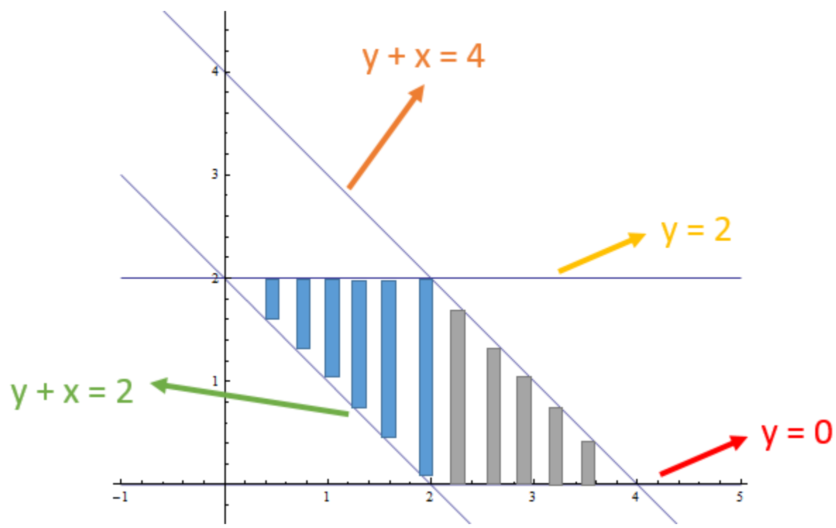
a) Utilizando el orden de integración $dxdy$

| No. | Explicación | Operatoria |
|---|---|---|
| 1 | En el orden de integración $dxdy$ se procede a integrar mediante filas, en las cuales el diferencial $dx$ es variable respecto a $y$ y el diferencial $dy$ es constante. |  |
| 2 | Utilizando la gráfica anterior, se definen los valores en que varían $x$ y $y$. | $2 - y \le x \le 4 - y \quad (1)$<br>$0 \le y \le 2 \quad (2)$ |
| 3 | Se define la función del área a calcular. | $A = \iint dA = \iint dxdy$ |
| 4 | Se utilizan los límites obtenidos de (1) y (2) para definir los límites de la integral doble. | $A = \int_0^2 \int_{2-y}^{4-y} dxdy$ |
| 5 | Se resuelve la integral doble. | $A = \int_0^2 \int_{2-y}^{4-y} dxdy = 4$ |

**R./**

**El área de la región acotado por las rectas es de $4\ u^2$.**

b) Utilizando el orden de integración $dydx$

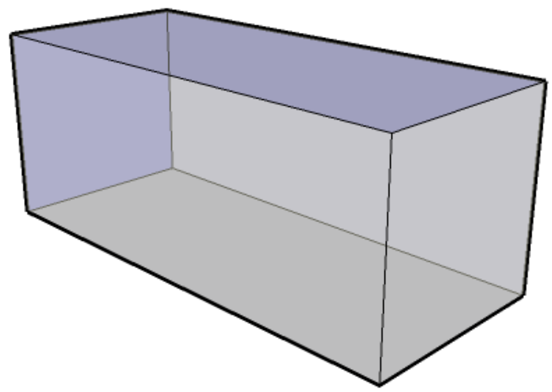
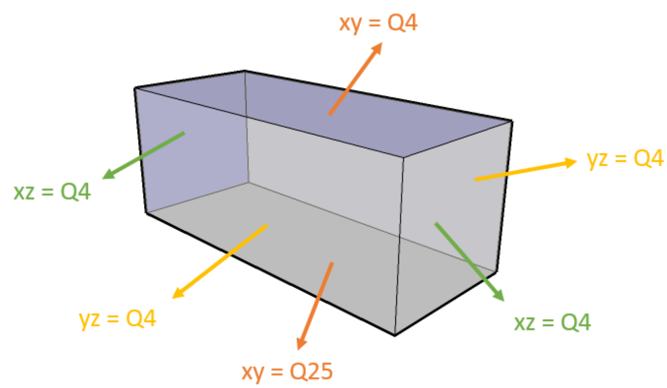
| No. | Explicación | Operatoria |
|---|---|---|
| 1 | En el orden de integración $dydx$ se procede a integrar mediante columnas, en las cuales el diferencial $dy$ es variable respecto a $x$ y el diferencial $dx$ es constante.<br><br>Notar que $dy$ primero incrementa y luego decrementa, por lo tanto se deben definir 2 integrales para cada región. |  |
| 2 | Utilizando la gráfica anterior, se definen los valores en que varían $x$ y $y$ para la región de color azul. | $0 \leq x \leq 2 \quad (1)$<br>$2 - x \leq y \leq 2 \quad (2)$ |
| 3 | Utilizando la gráfica anterior, se definen los valores en que varían $x$ y $y$ para la región de color gris. | $2 \leq x \leq 4 \quad (3)$<br>$0 \leq y \leq 4 - x \quad (4)$ |
| 4 | Se define la función de área a calcular. | $A = \iint dA_1 + \iint dA_2 = \iint dy_1 dx_1 + \iint dy_2 dx_2$ |
| 5 | Se utilizan los límites obtenidos de (1), (2), (3) y (4) para definir las integrales dobles. | $A = \int_0^2 \int_{2-x}^2 dydx + \int_2^4 \int_0^{4-x} dydx$ |
| 6 | Se resuelve la integral doble. | $A = \int_0^2 \int_{2-x}^2 dydx + \int_2^4 \int_0^{4-x} dydx = 2 + 2 = 4$ |

**R./**

**El área de la región acotado por las rectas es de $4\ u^2$.**

**TEMA 4 (20 puntos)**

Un contenedor (en forma de un sólido rectangular) debe tener un volumen de 480 pies cúbicos. Construir la base costará Q25 por pie cuadrado y construir los lados y la parte superior costará Q4 por pie cuadrado. Determine las dimensiones del contenedor de este tamaño que minimicen el costo.

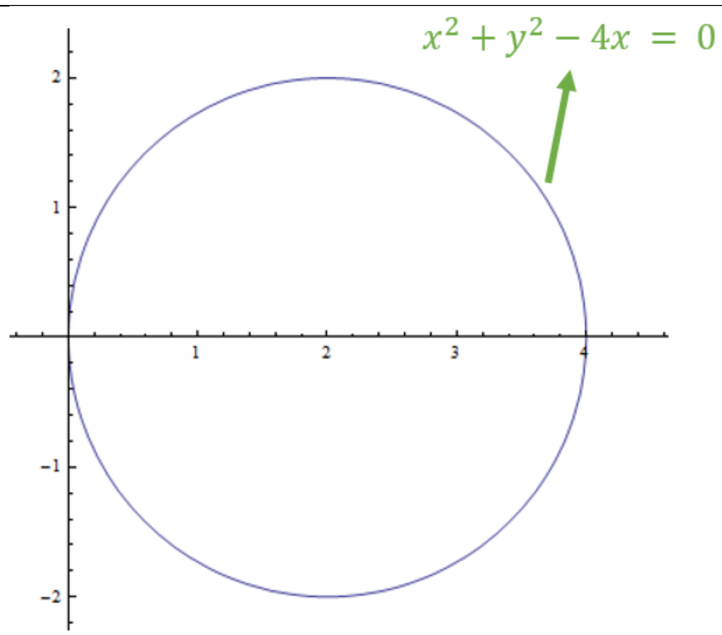
| No. | Explicación | Operatoria |
|---|---|---|
| 1 | Para proceder a resolver este problema mediante Multiplicadores de Lagrange, se deben identificar 2 funciones:<br><br>$f = función\ a\ optimizar$<br>$g = función\ restricción$ |  |
| 2 | En este problema, se debe optimizar el área del contenedor bajo la restricción de su propio volumen, el cual dependiendo de sus lados tiene un costo asignado. |  |
| 3 | Teniendo conocimiento de cuál función es cuál, se definen $f$ y $g$. | $\mathrm{A} = 2xy + 2yz + 2xz$<br>$f = 25xy + 4xy + 4(2yz) + 4(2xz)$<br>$\boldsymbol{f = 29xy + 8yz + 8xz}$<br><br>$\mathrm{V} = base * largo * altura = 480$<br>$\boldsymbol{g = xyz - 480}$ |
| 4 | Y se definen las funciones necesarias para desarrollar el método de Lagrange y así obtener los valores óptimos de las variables. | $\nabla f = \lambda \nabla g$<br><br>$(29xy + 8yz + 8xz) = \lambda(xyz - 480)$<br><br>$f_x = \lambda\, g_x \quad f_y = \lambda\, g_y \quad f_z = \lambda\, g_z$ |

| | | |
|---|---|---|
| 5 | Se arma un sistema de ecuaciones de 4 variables. | $(1)\quad 29y + 8z = \lambda(yz)$<br>$(2)\quad 29x + 8z = \lambda(xz)$<br>$(3)\quad 8y + 8x = \lambda(xy)$<br>$(4)\quad xyz = 480$ |
| 6 | Se procede a resolver el sistema con las funciones (1), (2), (3) y (4). | $\lambda = 3.14$<br>$\boldsymbol{x = 5.10, y = 5.10, z = 18.48}$ |

**R./**
**Las dimensiones del contenedor para minimizar el costo deben ser $\mathbf{5.10\ x\ 5.10\ x\ 18.48}$ (pies).**

## TEMA 5 (20 puntos)

Utilice una integral doble en coordenadas polares para hallar el volumen del sólido interior al hemisferio $\boldsymbol{z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}}$ e interior al cilindro $\boldsymbol{x^2 + y^2 - 4x = 0}$.

| No. | Explicación | Operatoria |
|---|---|---|
| 1 | Primero se procede a realizar un corte en el plano XY haciendo z=0. | $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$<br>$\sqrt{16 - x^2 - y^2} = 0 \quad (1)$ |
| 2 | Haciendo uso de (1) se define la integral de volumen correspondiente acotada en la región $R$. | $V = \iint \left(\sqrt{16 - x^2 - y^2}\right) dA$ |
| 3 | Luego se definen las ecuaciones para transformar en coordenadas polares. | $x^2 + y^2 = r^2 \quad (2)$<br>$x = r\cos\theta \quad (3)$<br>$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \quad (4)$<br>$\sqrt{16 - (x^2 + y^2)} = 0$<br>$\sqrt{16 - (r^2)} = 0$<br>$\sqrt{16 - r^2} = 0 \quad (5)$ |
| 4 | Se define de nuevo la integral de volumen correspondiente | $V = \iint \left(\sqrt{16 - r^2}\right) r\, dr d\theta$ |
| 5 | Se grafica la región R en los planos XY. |  |

| | | |
|---|---|---|
| 6 | Ya que se quieren coordenadas polares se deben obtener los límites en términos de $r$, para ello se emplean las ecuaciones del cilindro (6), (2) y (3). | $x^2 + y^2 - 4x = 0 \quad (6)$<br>$x^2 + y^2 = 4x$<br><br>$r^2 = 4(r\cos\theta)$<br>$r = 4\cos\theta$<br><br>$0 \leq r \leq 4\cos\theta \quad (7)$ |
| 7 | Se obtienen los límites en términos de $\theta$, para se hace uso de simetría. | $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0 \quad (8)$ |
| 8 | Se procede a formar la integral en coordenadas polares usando (7) y (8). | $2\int_0^{\pi/2}\int_0^{4\cos\theta}\left(\sqrt{16-r^2}\right) r\, dr d\theta$ |
| 9 | Se resuelve la integral doble. | $2\int_0^{\pi/2}\int_0^{4\cos\theta}\left(\sqrt{16-r^2}\right) r\, dr d\theta = \frac{64}{3}\pi - \frac{256}{9} = 38.57$ |

**R./**

**El volumen es de 38.57 $u^3$.**