UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

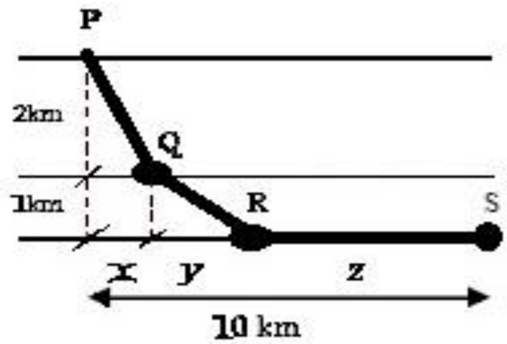
CLAVE-112-4-M-1-00-2017

CURSO:	**Matemática Intermedia 2**
SEMESTRE:	**Primero**
CÓDIGO DEL CURSO:	**112**
TIPO DE EXAMEN:	**Examen final**
FECHA DE EXAMEN:	**Mayo de 2017**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Alejandro Castañeda**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Alejandro Castañeda**
REVISÓ EL EXAMEN:	**Ing. Carlos Garrido**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

Temario "A"

TEMA 1 (20 pts)

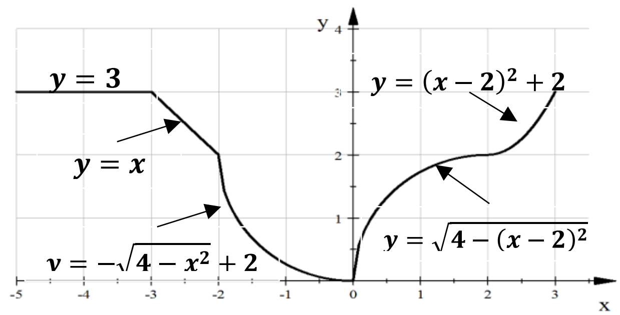
Se ha de construir una conducción de agua desde "$\boldsymbol{P}$ " hasta "$\boldsymbol{S}$ ". La construcción tiene costos diferentes según la zona (ver figura). Usar multiplicadores de Lagrange para hallar $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ & $\boldsymbol{z}$ tales que el costo "$\boldsymbol{C}$ " sea mínimo, si el costo por $\boldsymbol{Km}$ es $\$\mathbf{300}$ entre $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{Q}$, $\$\mathbf{200}$ entre $\boldsymbol{Q}$ y $\boldsymbol{R}$ y $\$\mathbf{100}$ entre $\boldsymbol{R}$ y $\boldsymbol{S}$



Tema 2 (20 pts.)

Evalúe la Integral de línea

$\int_C \boldsymbol{2xe^{-y}dx + (2y - x^2e^{-y})dy}$ Donde C es el recorrido que se muestra en la figura.



Tema 3 (20 pts.)

a) Determine el volumen en el primer octante acotado por $\boldsymbol{x + z = 1}$ & $\boldsymbol{y + 2z = 2}$, use una integral triple en **coordenadas cartesianas** en el orden "$dxdzdy$"

b) Plantee (pero no resuelva) la integral triple en **coordenadas Esféricas** para calcular el Volumen dentro de $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ y dentro de $1 = x^2 + y^2$ limitado por $z = 0$

Tema 4 (20 pts.)

Con $\oint_C \boldsymbol{y\ \sin(x)dx + (x + y - 1)dy}$ comprobar el Teorema de Green:

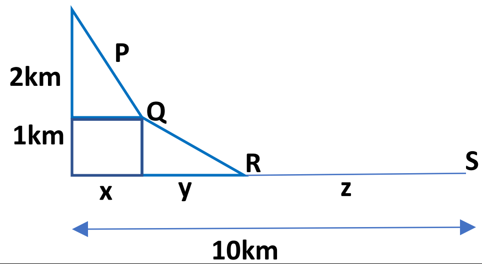
a) Por integral de línea.

b) Por Green.

Donde C: la curva formada por la graficas de las funciones $\boldsymbol{y = \sin(x)}$ & $\boldsymbol{y = \cos(x)}$ entre los dos primeros puntos de corte positivos (eje "x" positivo)

Tema 1

Se ha de construir una conducción de agua desde "P" hasta "S". La construcción tiene costos diferentes según la zona (ver figura). Usar multiplicadores de Lagrange para hallar x, y & z tales que el costo "C" sea mínimo, si el costo por km es $300 entre P y Q, $200 entre Q y R y $100 entre R y S.

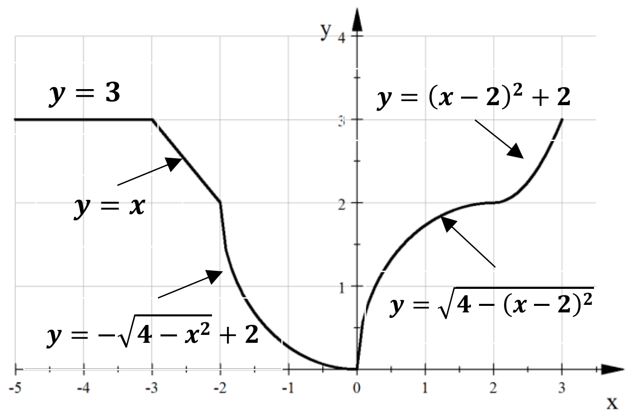


Procedimiento	Operatoria
Como primer paso, determinamos nuestra ecuación de costos, para ello definimos nuestras ecuaciones de la distancia en función de x, y, z.	$Distancia = PQ + QR + RS$ $PQ = \sqrt{(2)^2 + x^2}$ $QR = \sqrt{(1)^2 + y^2}$ $RS = z$
Ahora determinamos la ecuación del costo total.	$Costo = 300PQ + 200QR + 100RS$ $f_{(x,y,z)} = 300\left(\sqrt{4 + x^2}\right) + 200\left(\sqrt{1 + y^2}\right) + 100z$
Continuamos obteniendo nuestra restricción, para ello recurrimos a la figura del problema.	$x + y + z = g_{(x,y,z)}$
Ahora determinamos el vector gradiente, para ello derivamos cada una de sus componentes $(x, y, z.)$.	$\nabla f_{(x,y,z)} \langle \frac{300(2x)}{2\sqrt{4 + x^2}}, \frac{200(2y)}{2\sqrt{1 + y^2}}, 100\rangle$
Luego, encontramos nuestro vector lambda a partir de nuestra restricción antes obtenida.	$\nabla g_{(x,y,z)} = \langle 1,1,1\rangle$
Procedemos a igualar el vector gradiente f(x) con el producto de lambda por el vector g(x).	$\nabla f_{(x)} = \lambda * g_{(x,y,z)}$ $\langle \frac{300(2x)}{2\sqrt{4 + x^2}}, \frac{200(2y)}{2\sqrt{1 + y^2}}, 100\rangle = \lambda \langle 1,1,1\rangle$

Procedemos a igualar cada componente del vector gradiente y el vector lambda.	(1) $\frac{300(x)}{\sqrt{4+x^2}} = \lambda$ (2) $\frac{200(y)}{\sqrt{1+y^2}} = \lambda$ (3) $100 = \lambda$
Igualamos (1) y (3) y despejamos para *x*	$300x(4+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 100$ $3x = \sqrt{4+x^2}$ $x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
Igualamos (2) y (3) y despejamos para *y*	$200y(1+y^2)^{-\frac{1}{2}} = 100$ $2y = \sqrt{1+y^2}$ $y = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
Por último encontramos *z* por medio de nuestra restricción	$z = 10 - x - y$ $z = 10 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}$

Tema 2

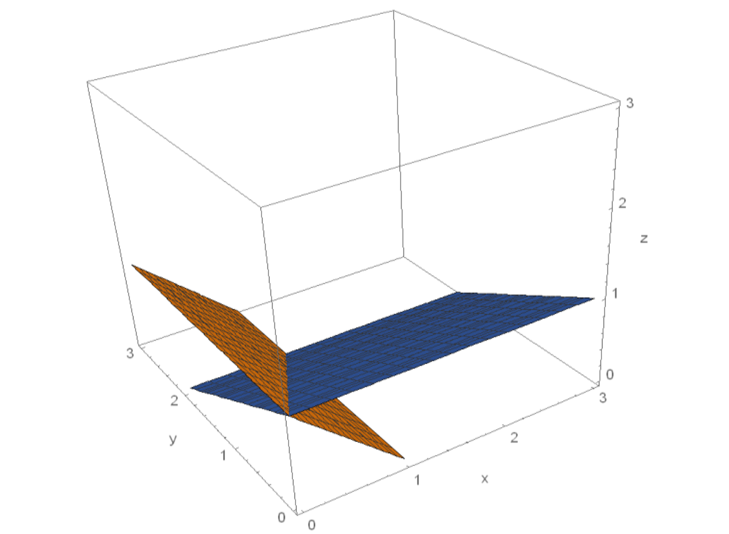
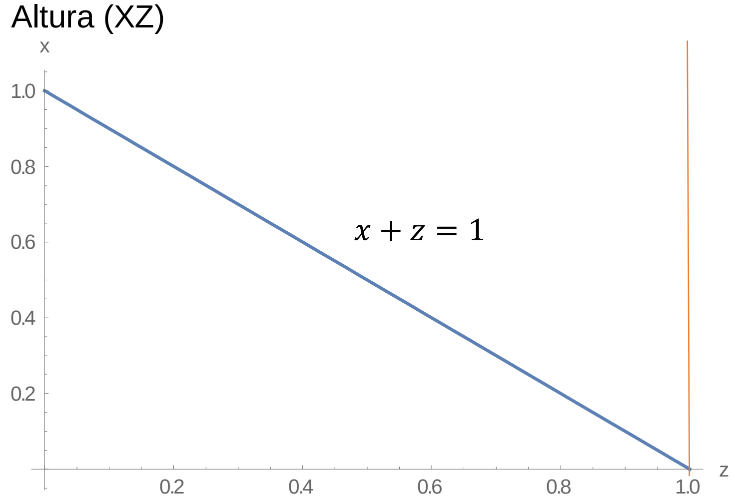
Evalúe la integral de línea $\int_c 2xe^{-y}dx + (2y - x^2e^{-y})dy$ donde C es el recorrido que se muestra en la figura.

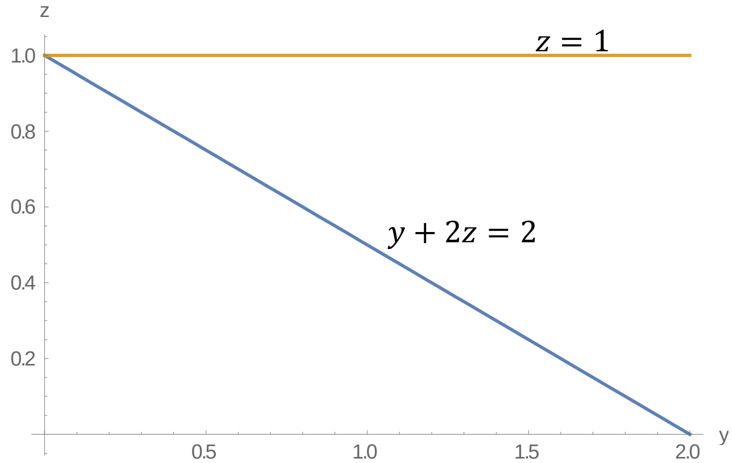


Procedimiento	Operatoria
Primero, verificamos que el campo sea conservativo.	$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ $-2xe^{-y} = -2xe^{-y}$ **El campo es conservativo de C: (-5,3) a (3,3)**
Escribimos la integral de línea para la ecuación.	$\int F = \int 2xe^{-y}dx + \int (2y - x^2e^{-y})dy$
A consecuencia de que el campo sea conservativo, podemos evaluar dicha integral en los extremos “C”. Para ello resolvemos dicha integral y luego evaluamos.	$f(x,y) = x^2e^{-y} + y^2 + x^2e^{-y}$ $f(x,y) = x^2e^{-y} + y^2$ $W = ((3)^2e^{-3} + (3)^2) - ((-5)^2e^{-3} + (3)^2)$ $W = (9e^{-3} + 9) - (25e^{-3} + 9)$ $W = -16e^{-3} = -0.7966J$

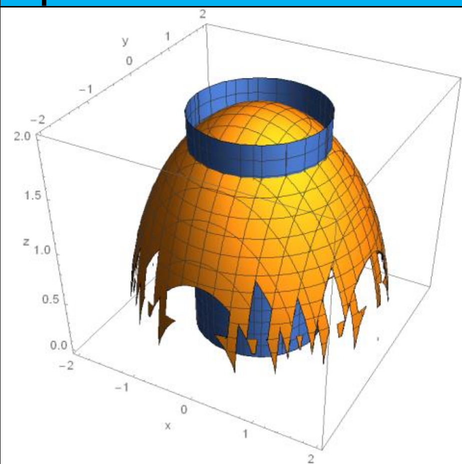
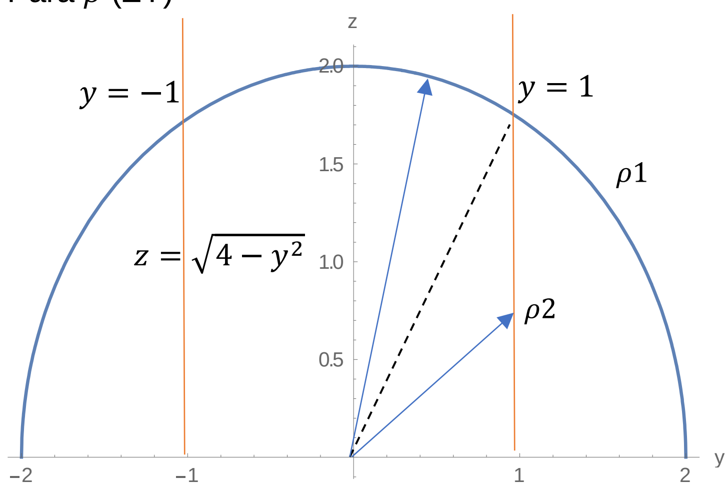
Tema 3 (20 pts.)

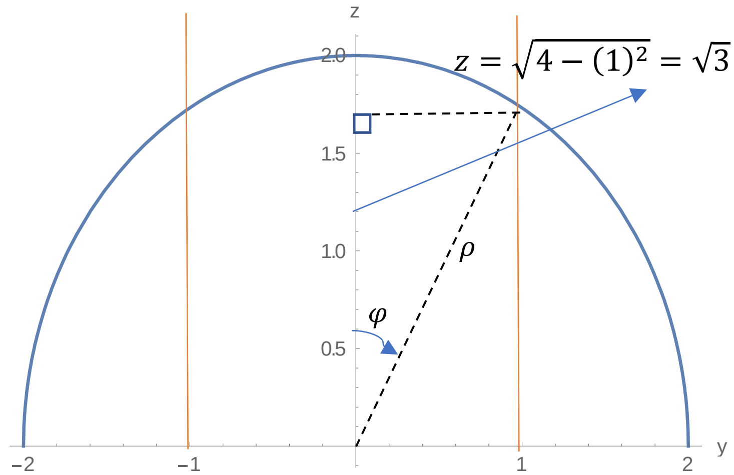
a) Determine el volumen en el primer octante acotado por $\boldsymbol{x+z=1}$, $\boldsymbol{y+2z=2}$ **& z = 0.** use una integral triple en **coordenadas cartesianas** en el orden “$dxdzdy$”

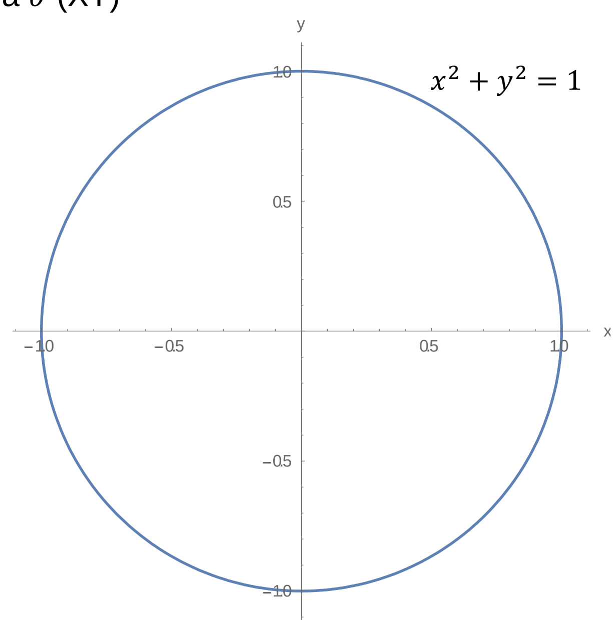
Procedimiento	**Operatoria**
Primero graficaremos la región establecida por los planos del enunciado.	
Procedemos a graficar las trazas para identificar los límites de integración.	Altura (XZ)  Base (YZ)

	
Luego determinamos los límites de integración y escribimos la integral del volumen.	$0 \leq x \leq 1 - z$ $0 \leq z \leq \frac{2-y}{2}$ $0 \leq y \leq 2$ $V = \int_0^2 \int_0^{\frac{2-y}{2}} \int_0^{1-z} dxdzdy$
Por último, resolvemos la integral y obtenemos el volumen del sólido	$V = \int_0^2 \int_0^{\frac{2-y}{2}} \int_0^{1-z} dxdzdy = 0.667\ u^3$

b) Plantee (pero no resuelva) la integral triple en coordenadas esféricas para calcular el volumen dentro de $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ y dentro de $1 = x^2 + y^2$ limitado por $z = 0$.

Procedimiento	**Operatoria**
Primero graficaremos la sección limitadas por las curvas.	
Luego, veremos las trazas para establecer nuestros límites de integración en la variable ρ.	Para ρ (ZY) 
Transformando a coordenadas cilíndricas la ecuación de la esfera y el cilindro.	$x^2 + y^2 + z^2 = 4$ $\rho^2 = 4$ $\rho 1 = 2$ $x^2 + y^2 = 1$ $(\rho sen\varphi cos\theta)^2 + (\rho sen\varphi sen\theta)^2 = 1$ $\rho^2 sen^2\varphi[cos^2\theta + sen^2\theta] = 1$ $\rho^2 sen^2\varphi = 1$ $\rho 2 = csc\varphi$

<table>
<tr>
<td>Ahora dibujamos la traza ZY para los límites de la variable φ.</td>
<td>Para φ (ZX o ZY)
ZY


$$\varphi = tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = 0.5235$$</td>
</tr>
<tr>
<td>Ahora determinamos los límites de integración para la variable θ.</td>
<td>Para θ (XY)


$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$</td>
</tr>
<tr>
<td>Por último, podemos escribir nuestra suma de integrales para calcular el volumen de la figura.</td>
<td>$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{0.5235}\int_0^{2} \rho^2 sen\varphi \, d\rho d\varphi d\theta + \int_0^{2\pi}\int_{0.5235}^{\pi/2}\int_0^{csc\varphi} \rho^2 sen\varphi \, d\rho d\varphi d\theta$$</td>
</tr>
</table>

Tema 4 (20 pts.)

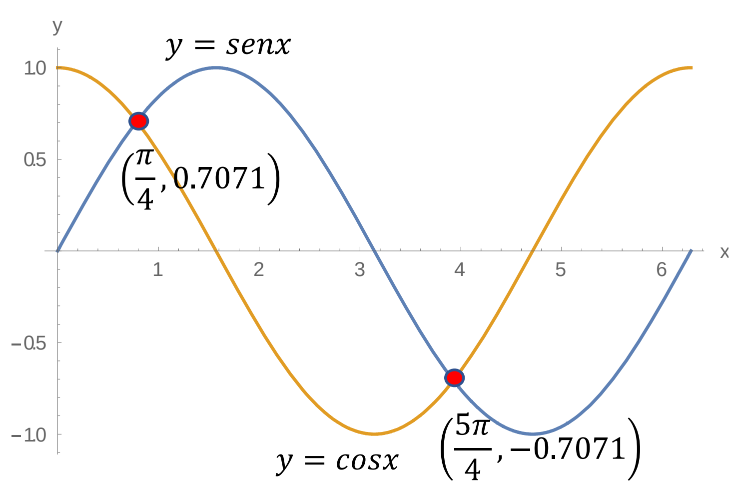
Con $\oint_C \; \boldsymbol{y}\ \mathbf{sin}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx} + (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} - \mathbf{1})\boldsymbol{dy}$ comprobar el Teorema de Green:

b) Por integral de línea.

c) Por Green.

Donde C: la curva formada por la graficas de las funciones $\boldsymbol{y} = \mathbf{sin}(\boldsymbol{x})$ & $\boldsymbol{y} = \mathbf{cos}(\boldsymbol{x})$ entre los dos primeros puntos de corte positivos (eje "x" positivo)

INCISO A: por integral de línea

Procedimiento	**Operatoria**
Primero graficamos las curvas junto a su intersección.	
Establecemos la integral de flujo	$W = W1 + W2$
Nombramos C con la primera sustitución en y.	$C1: y = cosx\ ,\ \ de\ \left(\frac{\pi}{4}, 0.7071\right)\ a\ \left(\frac{5\pi}{4}, -0.7071\right)$ $dy = -senxdx$
Hacemos la sustitución correspondiente para W1 y resolvemos la integral en función de *x*	$W1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} cosx\ senx\ dx + (x + cosx - 1)(-senx\ dx)$

	$$W1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (cosx\ senx - xsenx - cosx\ senx + senx)dx$$ $$W1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (senx - xsenx)\ dx = -0.5037$$
Luego, determinamos la sustitución de C2 en y	$$C2: y = senx, \qquad de \left(\frac{5\pi}{4}, -0.7071\right)\ a\ \left(\frac{\pi}{4}, 0.7071\right)$$ $$dy = cosxdx$$
Realizamos la sustitución para encontrar W2 y resolvemos la integral.	$$W2 = \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} sen^2x\ dx + (x + senx - 1)(cosx\ dx)$$ $$W2 = \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (sen^2x + xcosx + senxcosx - cosx)dx$$ $$W2 = 1.761$$
Obtenemos el resultado de la integral de línea con la suma de W1 y W2.	$$W = W1 + W2 = -0.5037 + 1.761$$ $$W = 1.258J$$

INCISO B: por Green

Procedimiento	Operatoria
Definimos la integral doble para comprobar el teorema de Green y la resolvemos.	$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \int_{cosx}^{senx} 1 - senx\ dydx = 1.258J$$