UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-112-4-V-1-00-2017

CURSO:	**Matemática Intermedia 2**
SEMESTRE:	**Primero**
CÓDIGO DEL CURSO:	**112**
TIPO DE EXAMEN:	**Examen Final Parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**11 de mayo de 2017**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Esther Pineda**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Kevin Emanuel Itzep Mendoza**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

Universidad de San Carlos de Guatemala **Departamento de Matemática**
Facultad de Ingeniería **Matemática Intermedia 2**

11 de mayo de 2017 Examen Final Parcial

Tema 1: 20 puntos.

Utilice el teorema de la divergencia de Gauss para calcular el flujo de F a través de S. El campo vectorial es: $F(x, y, z) = x^3 i + y^3 j + z^3 k$ y "S" es la parte de la esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
En el primer octante, haga un esquema de S.

Tema 2: 20 puntos.

Suponga que la temperatura T (en grados Celsius) en el punto (x, y, z) en el espacio está dada por $T(x, y, z) = 50 + xyz$.

- **a.** Encuentre la razón de cambio de temperatura con respecto a la distancia (en pies) en el punto P (3, 4, 1) en dirección del vector v = (1, 2, 2).
- **b.** ¿En que dirección cambia T más rápidamente?
- **c.** ¿Cuál es mayor razón de cambio en P?

Tema 3: 20 puntos.

Determine el volumen del solido limitado por las superficies:
$\mathrm{z} = 3\mathrm{x}^2 + 3\mathrm{y}^2$ & $z = 4 - x^2 - \mathrm{y}^2$, haga un esquema del sólido.

Tema 4: 20 puntos.

Una topógrafa desea encontrar el área de un terreno en forma de triangulo. Mide dos lados adyacentes y encuentra que miden 500 y 700 pies con un error posible de hasta 1 pie en cada medición. Mide el angulo entre los dos lados y encuentra ϴ = 30°, con un error posible de hasta 0.25°. Estimar el error máximo que resulta, al calcular el área del terreno.

Tema 5: 20 puntos.

Una caja rectangular se halla inscrita en el primer octante con tres de sus lados en los planos de coordenadas y un vértice sobre el plano $\mathrm{x} + 3\mathrm{y} + 7\mathrm{z} = 11$. ¿Cuál es el volumen máximo posible de dicha caja?

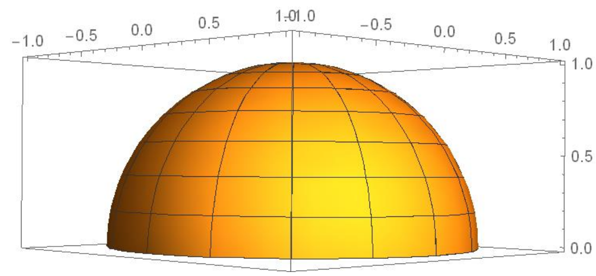
Universidad de San Carlos de Guatemala — **Departamento de Matemática**
Facultad de Ingeniería — **Matemática Intermedia 2**

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema 1: 20 puntos

$$F(x, y, z) = x^3 i + y^3 j + z^3 k$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se grafica la función $$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$	
2.	De manera que se describe la ecuación de la divergencia de Gauss.	$$\int_s \vec{F} * \vec{n}\, ds = \iiint divF\, dv$$
3.	Donde la ecuación de la divergencia es:	$$\text{divF} = \left\langle \frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz} \right\rangle \bullet \langle x^3, y^3, z^3 \rangle$$ $$\text{divF} = 3\,(x^2 + y^2 + z^2)$$
4.	Planteando la integral por Coordenadas Esféricas	$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 3\rho^2 \big(\rho^2 Sin(\varphi)\big)\, d\rho d\varphi d\theta$$
5.	Resolviendo la integral	$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{3}{5}\rho^5 \Big\vert_0^1 \big(Sin(\varphi)\big)\, d\varphi d\theta$$ $$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{3}{5} \big(Sin(\varphi)\big)\, d\varphi d\theta$$

		$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\frac{3}{5}\left(Sin(\varphi)\right)\,d\rho d\varphi d\theta$$ $$\int_0^{\pi/2}-\frac{3}{5}Cos(\varphi)\Big\|_0^{\pi/2}\,d\theta$$ $$\int_0^{\pi/2}\frac{3}{5}\,d\theta=\frac{3\pi}{10}$$

Tema 2: 20 puntos

$$T(x,y,z)=50+xyz$$

a) Encuentre la razón de cambio de la temperatura con respecto a la distancia (en pies) en el punto P (3, 4, 1) en dirección del vector v = (1, 2, 2).

No.	Explicación	Operatoria
1.	Primero se determina la divergencia de T	$$\nabla\mathrm{T}=\left\langle\frac{d}{dx},\frac{d}{dy},\frac{d}{dz}\right\rangle$$ $$\nabla\mathrm{T}=\langle yz,xz,xy\rangle$$ $$\nabla\mathrm{T}(3,4,1)=\langle 4,3,12\rangle$$
2.	Se calcula el vector unitario.	$$\vec{u}=\frac{V}{\|V\|}$$ $$\mathrm{V}=\langle 1,2,2\rangle$$ $$\|V\|=\sqrt{1+4+4}=3$$ $$\vec{u}=\frac{\langle 1,2,2\rangle}{3}=\left\langle\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right\rangle$$
3.	De manera que se determina la derivada Direccional	$$\mathrm{Duf}=\nabla\mathrm{T}\bullet\vec{u}$$

		$\text{Duf} = \langle 4,3,12 \rangle \bullet \left\langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right\rangle$ $Duf = \frac{4}{3} + 2 + 8$ $Duf = \frac{34}{3}$

b) En que dirección cambia T más rápidamente

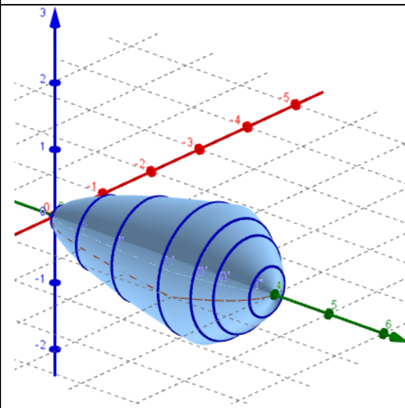
No.	Explicación	Operatoria
1.	Se calcula en el procedimiento anterior, de manera que la dirección que cambia T es:	$\nabla \text{T} = \left\langle \frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz} \right\rangle$ $\nabla \text{T} = \langle yz, xz, xy \rangle$ $\nabla \text{T}(3,4,1) = \langle 4,3,12 \rangle$

c) ¿Cuál es mayor razón de cambio en P?

No.	Explicación	Operatoria
1.	Para conoces la mayor razón de cambio se determina el módulo de ∇T.	$\lvert \nabla \text{T} \rvert = \sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2}$ $\lvert \nabla \text{T} \rvert = \sqrt{169}$ $\lvert \nabla \text{T} \rvert = 13$

Tema 3: 20 puntos

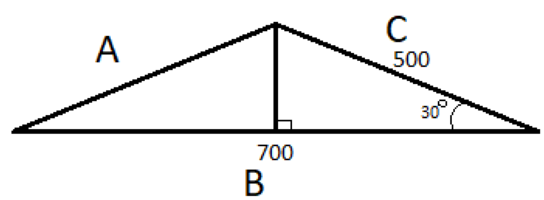
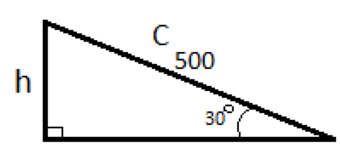
$$z = 3x^2 + 3y^2$$
$$z = 4 - x^2 - y^2$$

No.	**Explicación**	**Operatoria**
1.	Se grafica el volumen	
2.	Se determina el punto de intersección, mediante la igualación de rectas	$z = 3x^2 + 3y^2 \qquad z = 4 - x^2 - y^2$ $z = 3(x^2 + y^2) \qquad (x^2 + y^2) = 4 - z$ $z = 3(4 - z)$ $z = 3$
3.	Se determina la curva de intersección	En z = 3 $3 = 3(x^2 + y^2)$ $x^2 + y^2 = 1$
4.	Se plantea la integral	$V = \int\int\int_{zi}^{zf} r\, dz\, dr\, d\theta$ $V = \int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_{3r^2}^{4-r^2} r\, dz\, dr\, d\theta$

5.	Se resuelve la integral	$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r\,(4 - r^2 - 3r^2)\, dr\, d\theta$ $V = \int_0^{2\pi} 4(r - r^3)dr \;\, d\theta$ $V = \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Big\vert_0^1 \; d\theta$ $V = 4\left(\frac{1}{4}\right) \int_0^{2\pi} \; d\theta$
6.	Se determina el volumen del solido	$V = 2\pi$

Tema 4: 20 puntos.

a) Determine la amplitud, período y desplazamiento de fase.

No	**EXPLICACION**	**OPERATORIA**
1	Se procede a hacer el diagrama	 $A = \frac{1}{2}BH$
2	Se plante la ecuación	 $\text{Sin}(\theta) = \frac{h}{c}$

		$\mathrm{h} = \mathrm{C} * \mathrm{Sin}(\theta)$ $\mathrm{A} = \frac{1}{2} BC * \mathrm{Sin}(\theta)$
3	Se plantea la derivada parcial del área para determinar el error.	$\mathrm{dA} = \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \mathrm{B}} dB + \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \mathrm{C}} dC + \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \theta} d\theta$ $\mathrm{dA} = \frac{1}{2} CSin(\theta)\ dB + \frac{1}{2} BSin(\theta)\ dC + \frac{BC}{2} Cos(\theta)\ d\theta$
4	Sustituyendo valores	$\mathrm{dA} = \frac{1}{2}\left(500Sin(30)\ (1) + 700Sin(30)(1) + (500 * 700)Cos(30)\ (\frac{0.35\pi}{180})\right)$
5	El error es de	$\mathrm{dA} = 961.28\ \mathrm{pie}^2$

Tema 5: 20 puntos

Dimensiones de caja rectangular

$$x + 3y + 7z = 11$$

No.	Explicación	Operación
1	Se conoce que el volumen del solido es:	$V = xyz$ $Vx = yz$ $Vy = xz$ $Vz = yx$
2	Se determina la función de restricción	$f_{rest} = x + 3y + 7z - 11$ $f_x = 1$ $f_y = 3$ $f_z = 7$

3	Se determina los coeficientes de Lagrange del problema	$\lambda = yz$ $3\lambda = \mathrm{xz} \rightarrow \lambda = \frac{\mathrm{xz}}{3}$ $7\lambda = \mathrm{xy} \rightarrow \lambda = \frac{\mathrm{xy}}{7}$
4	Se igualan los coeficientes	$\mathrm{yz} = \frac{\mathrm{xz}}{3} \rightarrow x = 3y$ $\frac{\mathrm{xy}}{7} = \frac{\mathrm{xz}}{3} \rightarrow z = \frac{3}{7}y$
5	Se sustituyen valores	$x + 3y + 7z - 11 = 0$ $3y + 3y + 7\left(\frac{3}{7}y\right) - 11 = 0$ $y = \frac{11}{9}$ $x = \frac{11}{3}$ $z = \frac{11}{21}$
6	Se determina el volumen	$V_{max} = \left(\frac{11}{9}\right)\left(\frac{11}{3}\right)\left(\frac{11}{21}\right) = \left(\frac{1331}{567}\right) \cong 2.35u^3$