UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-114-1-M-1-00-2017

CURSO:	**Matemática Intermedia 3**
SEMESTRE:	**Primero**
CÓDIGO DEL CURSO:	**114**
TIPO DE EXAMEN:	**Primer Examen Parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**22 de febrero de 2017**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Axel Iván Ruiz García**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Axel Iván Ruiz García**
REVISO EL EXAMEN:	**Ing. Eder Paz**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA — *MATEMÁTICA INTERMEDIA 3*
FACULTAD DE INGENIERÍA — *JORNADA MATUTINA*
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA — *FEBRERO 22, 2017*

PRIMER EXAMEN PARCIAL Temario "A"

INSTRUCCIONES:

No se permite el uso de teléfono durante el examen.
Deje constancia de todo su procedimiento. Respuestas sin procedimiento no tendrán validez.
Para tener derecho a revisión sus respuestas deben estar escritas con lapicero.

Tema No. 1 (15 puntos)

Clasifique las siguientes ecuaciones diferenciales. ***Escriba sus respuestas en el cuadernillo.***

		Orden	Grado	Lineal (Sí ó No)
a.	$2Y \cdot Y'' + X(Y')^4 = \sin x$			
b.	$(Y^2 - 1)dx + xdy = 0$			
c.	$2X^2 Y^{(6)} + 3Y = \tan x$			
d.	$\frac{d^2Y}{dX^2} = \sqrt{1 + \left(dY/dX\right)^2}$			
e.	$(1 - X)Y'' - 4XY' + 5Y = \cos X$			

TEMA No. 2 (10 puntos)

Si $f(x, y) = y^2 \sin x - x^3 y - x^2 + y \ln y - y$ es la solución de una ecuación diferencial exacta. Determine la ecuación diferencial exacta.

TEMA No. 3 (15 puntos c/ u)

Resuelva, indicando el ***método utilizado*** y dejando constancia de ***todo*** su procedimiento.

1. $(x + ye^{(y/x)}dx - xe^{(y/x)}dy = 0, sujeto\ a\ y(1) = 0$
2. $x\frac{dy}{dx} - \frac{1}{y^2} = -y$
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy+2y-x-2}{xy-3y+x-3}$
4. $x\frac{dy}{dx} = 2xe^x - y + 6x^2$
5. Resuelva el problema con valores iniciales de tal forma que la solución sea continua.

$$y' + 2xy = f(x) \text{ sujeto a } y(0) = 2$$

Dónde: $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x \ge 1 \end{cases}$

AL FINALIZAR COLOQUE EL TEMARIO DENTRO DEL CUADERNILLO

NOMBRE: ____ **CARNET:** ________________

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

TEMA 1

Clasifique las ecuaciones diferenciales de acuerdo a la clasificación solicitada.

Solución:

		Orden	Grado	Lineal(Si/No)
a.	$2Y \cdot Y'' + X(Y')^4 = \sin x$	2	1	No. La primer derivada esta elevada a la cuatro. La segunda derivada esta multiplicada por y.
b.	$(Y^2 - 1)dx + xdy = 0$	1	1	Si es lineal en la variable x pero no en la variable y ya que esta elevada al cuadrado.
c.	$2X^2Y^{(6)} + 3Y = \tan x$	6	1	Sí. Las derivadas no están elevadas a ninguna potencia ni multiplicadas por la variable dependiente.
d.	$\frac{d^2Y}{dX^2} = \sqrt{1 + \left(dY/dX\right)^2}$	2	1	No. La primer derivada esta elevada al cuadrado y entre una raíz cuadrada.
e.	$(1 - X)Y'' - 4XY' + 5Y = \cos X$	2	1	Sí. Las derivadas no están elevadas a ninguna potencia ni multiplicadas por la variable dependiente.

TEMA 2

Si $f(x,y) = y^2 \sin x - x^3 y - x^2 + y \ln y - y$ es la solución de una ecuación diferencial exacta. Determine la ecuación diferencial exacta.

Solución:

No.	Explicación	Operatoria
1.	Sabiendo que una ecuación diferencial exacta es aquella que cumple con la siguiente condición.	**M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0**
2.	Para poder encontrar la ecuación diferencial exacta de donde viene la solución propuesta debemos de derivar parcialmente la solución en X y también en Y. Derivando parcialmente en X.	$\frac{\partial(F(x,y))}{\partial x} = y^2 Cos(X) - 3x^2 y - 2x$
3.	Ordenando los términos nos queda de la siguiente manera.	$\frac{\partial(F(x,y))}{\partial x} = -3x^2 y - 2x + y^2 Cos(X)$
4.	Ahora derivamos parcialmente en Y.	$\frac{\partial(F(x,y))}{\partial y} = 2ySen(X) - x^3 + Ln\lvert y\rvert$
5.	Ordenando los términos nos queda de la siguiente manera.	$\frac{\partial(F(x,y))}{\partial y} = 2ySen(X) + Ln\lvert y\rvert - x^3$

Ahora procedemos a sumar dichas soluciones con sus respectivos diferenciales y esta sería la ecuación diferencial exacta

R./

$$\boldsymbol{\left(-3x^2y - 2x + y^2Cos(X)\right)dx + (2ySen(X) + Ln|y| - x^3)dy = 0}$$

TEMA 3

Resuelva, indicando el método utilizado y dejando constancia de todo su procedimiento.

1. $(x + ye^{(y/x)}dx - xe^{(y/x)}dy = 0, sujeto\ a\ y(1) = 0$

No.	Explicación	Operatoria
1.	La siguiente ecuación diferencial la podemos resolver por el **método de sustitución**, para lo que utilizaremos U como variable para la sustitución.	$u = \frac{y}{x}$
2.	Encontrando Y en términos de U.	$y = ux$
3.	Para poder encontrar el diferencial de y (dy) derivamos la función de Y en términos de U y X.	$dy = udx + xdu$
4.	Ahora procedemos a sustituir en la ecuación original.	$(x + uxe^{u})dx - xe^{u}(udx + xdu) = 0$
5.	Realizamos la multiplicación para expandir la ecuación	$xdx + uxe^{u}dx - xe^{u}udx - x^2e^{u}du = 0$
6.	Simplificamos la ecuación.	$xdx - x^2e^{u}du = 0$
7.	Despejamos el término $x^2e^{u}du.$	$xdx = x^2e^{u}du$
8.	Dejamos todas las X de un lado.	$\frac{x}{x^2}dx = e^{u}du$
9.	Simplificamos la ecuación.	$\frac{1}{x}dx = e^{u}du$
10.	Ahora integramos a ambos lados	$\int \frac{1}{x}dx = \int e^{u}du$
11.	Y obtenemos como resultado.	$Ln\|x\| = e^{u} + C$
12.	Despejamos para la constante C.	$Ln\|x\| - e^{u} = C$
13.	Regresamos a la variable original sabiendo que $u = \frac{y}{x}$	$Ln\|x\| - e^{\frac{y}{x}} = C$
14.	Sabemos que ya ecuación estaba sujeta a la siguiente condición $y(1) = 0$ por lo que procedemos a ingresar los valores.	$Ln\|1\| - e^{\frac{0}{1}} = C$

Luego de haber operado obtenemos como resultado

R./

$$\boldsymbol{-1 = C}$$

2. $x\frac{dy}{dx} - \frac{1}{y^2} = -y$

No.	Explicación	Operatoria
1.	La siguiente ecuación diferencial la resolveremos por el **método de Bernoulli.** Pondremos en su forma estándar la ecuación.	$x\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{y^2}$
2.	Dividimos toda la ecuación dentro de x.	$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{1}{xy^2}$
3.	Ahora debemos de definir nuestro n ya que sabemos que para el método de podemos utilizar la sustitución $u = y^{1-n}$ para poder reducir nuestra ecuación de Bernoulli a una ecuación lineal.	$n = -2$
4.	Encontrando u.	$u = y^{1-(-2)}$ $u = y^3$
5.	Procedemos a derivar a ambos lados para encontrar el equivalente de $\frac{dy}{dx}$.	$\frac{du}{dx} = 3y^2\frac{dy}{dx}$
6.	Despejando $\frac{dy}{dx}$.	$\frac{1}{3y^2}\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}$
7.	Ahora sustituimos en nuestra inicial.	$\frac{1}{3y^2}\frac{du}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{1}{xy^2}$
8.	Multiplicaremos toda la ecuación por $3y^2$ con el fin de eliminar el término que acompaña a $\frac{du}{dx}$.	$\left[\frac{1}{3y^2}\frac{du}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{1}{xy^2}\right] * 3y^2$ $\frac{du}{dx} + \frac{3y^3}{x} = \frac{3y^2}{xy^2}$
9.	Simplificamos la ecuación	$\frac{du}{dx} + \frac{3y^3}{x} = \frac{3}{x}$
10.	Sustituimos $u = y^3$.	$\frac{du}{dx} + \frac{3u}{x} = \frac{3}{x}$
11.	Determinamos nuestro $p(x) = \frac{3}{x}$ Y procedemos a encontrar nuestro factor integrante	$F.I = e^{\int \frac{3}{x}dx}$
12.	Resolviendo la integral.	$F.I = e^{3\,Ln\|x\|}$ $F.I = x^3$
13.	Debemos nuestra ecuación por el factor integrante por definición sabemos que el	La fórmula que se utilizó para este paso se encuentra en la siguiente página.

	resultado automáticamente será $\frac{d}{dx}\left[e^{\int p(x)dx} * y\right] = e^{\int p(x)dx} * f(x)$ Sustituyendo valores en la resolución antes descrita nos queda de la siguiente manera.	$\frac{d}{dx}[x^3 * u] = x^3 * \frac{3}{x}$
14.	Simplificando.	$\frac{d}{dx}[x^3 * u] = 3x^2$
15.	Ahora procedemos a integrar a ambos lados.	$\int \frac{d}{dx}[x^3 * u] = \int 3x^2\, dx$
16.	Como resultado tenemos.	$x^3 * u = x^3 + C$
17.	Despejamos para u.	$u = 1 + \frac{C}{x^3}$
18.	Regresando a la variable original sabiendo que $u = y^3$.	$y^3 = 1 + \frac{C}{x^3}$

Aplicamos raíz cubica a ambos lados y con esto encontraríamos la respuesta

R./

$$\boldsymbol{y = \sqrt[3]{1 + \frac{C}{x^3}}}$$

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy+2y-x-2}{xy-3y+x-3}$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Procedemos a agrupar los términos de la fracción del lado derecho tanto en el numerador como en el denominador.	$\frac{dy}{dx} = \frac{(xy - x) + (2y - 2)}{(xy + x) - (3y + 3)}$
2.	Hacemos factor común en cada grupo de términos.	$\frac{dy}{dx} = \frac{x(y - 1) + 2(y - 1)}{x(y + 1) - 3(y + 1)}$
3.	Agrupamos.	$\frac{dy}{dx} = \frac{(y - 1)(x + 2)}{(y + 1)(x - 3)}$
4.	Una vez ya factorizada la ecuación procedemos a resolverla por el **método de variable separadas,** Procedemos a despejar todos los términos que tienen Y para dejarlos todos con el diferencial de y, y efectuamos el mismo procedimiento para x.	$\frac{(y + 1)}{(y - 1)}dy = \frac{(x + 2)}{(x - 3)}dx$

5.	Al realizar la división de las expresiones quedan.	$\frac{(y+1)}{(y-1)}=1+\frac{2}{y-1}$ $\frac{(x+2)}{(x-3)}=1+\frac{5}{x-3}$
6.	Despejando $\frac{dy}{dx}$.	$\frac{1}{3y^2}\frac{du}{dx}=\frac{dy}{dx}$
7.	Sustituimos estas expresiones en la ecuación.	$\left(1+\frac{2}{y-1}\right)dy=\left(1+\frac{5}{x-3}\right)dx$
8.	Ahora integramos a ambos lados.	$\int\left(1+\frac{2}{y-1}\right)dy=\int\left(1+\frac{5}{x-3}\right)dx$

Una vez efectuada la las integrales encontraremos la solución a la ecuación diferencial

R./

$$\boldsymbol{y+2Ln|y-1|=x+5Ln|x-3|+C}$$

4. $x\frac{dy}{dx}=2xe^x-y+6x^2$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Despejando la ecuación nos quedara de la siguiente manera.	$xdy=(2xe^x-y+6x^2)dx$
2.	Ordenando términos.	$(-2xe^x+y-6x^2)dx+(xdy)=0$
3.	La siguiente ecuación diferencial la resolveremos por el **método de ecuación exacta**, tomando en cuenta que nuestro M se igual a $2xe^x-y+6x^2$ y nuestro N igual a $-x$ Ahora procedemos a realizar $\frac{\partial M}{\partial y}$	$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial(-2xe^x+y-6x^2)}{\partial y}$ $\frac{\partial M}{\partial y}=1$
4.	Ahora procedemos a realizar $\frac{\partial N}{\partial x}$	$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial(x)}{\partial x}$ $\frac{\partial N}{\partial x}=1$
5.	Por definición sabemos que si $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ se dice que es ecuación exacta; en este caso podemos notar que las 2 derivadas parciales nos dieron como resultado 1 por lo que la ecuación es exacta. Sabemos que F(x, y) = C entonces sabemos.	$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0$

6.	Podemos definir que $M = \frac{\partial F}{\partial x}$ y $N = \frac{\partial F}{\partial y}$	$\frac{\partial F}{\partial x} = -2xe^x + y - 6x^2$
7.	Despejando nos queda de la siguiente manera	$\partial F = (-2xe^x + y - 6x^2)dx$
8.	Procedemos a integrar a ambos lados	$\int \partial F = \int (-2xe^x + y - 6x^2)\,dx$
9.	Nos queda como resultado.	$F = xy - 2x^3 - 2(e^x x - e^x) + Q(y)$
10.	Ahora calculamos $\frac{\partial F}{\partial y}$	$\frac{\partial F}{\partial y} = x + Q'(y)$
11.	Sabemos que $\frac{\partial F}{\partial y} = N$	$x = x + Q'(y)$ $0 = Q'(y)$
12.	Integramos a ambos lados	$\int 0 = \int Q'(y)$ $C = Q(y)$
13.	Sustituyendo Q (y) en F	$F = xy - 2x^3 - 2(e^x x - e^x) + C_1$
14.	Tomando en cuenta que $F(x, y) = C_2$	$xy - 2x^3 - 2(e^x x - e^x) + C_1 = C_2$ $xy - 2x^3 - 2(e^x x - e^x) = C_2 - C_1$

R./

$$\boldsymbol{xy - 2x^3 - 2(e^x x - e^x) = C}$$

5. Resuelva el problema con valores iniciales de tal forma que la solución sea continua.

$$y' + 2xy = f(x) \text{ sujeto a } y(0) = 2$$

Dónde: $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x \ge 1 \end{cases}$

No.	Explicación	Operatoria
1.	La siguiente ecuación diferencial la resolveremos por el **método de ecuación lineal.** Escribiendo la ecuación diferencial en su forma estándar y sustituyendo f(x) en el primer intervalo en la ecuación diferencial obtenemos.	$\frac{dy}{dx} + 2xy = x$
2.	Calculamos el factor de integración.	$P(x) = 2x$ $F.I = e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$
3.	Ahora integramos a ambos lados.	$\int \frac{d}{dx}[e^{x^2} * y] = \int e^{x^2} x\,dx$ $e^{x^2} * y = \int e^{x^2} x\,dx$

4.	Para resolver la siguiente integral $\int e^{x^2}x$ utilizaremos el método de sustitución.	$u = x^2$ $du = 2xdx$ $\frac{du}{2x} = dx$
5.	Sustituyendo nos queda de la siguiente forma.	$e^{x^2} * y = \frac{1}{2}\int e^u du$
6.	Resultado de la integral.	$e^{x^2} * y = \frac{1}{2}e^u + C$
7.	Regresando a la variable original.	$e^{x^2} * y = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$
8.	Despejando y.	$y = \frac{1}{2e^{x^2}}e^{x^2} + \frac{C}{e^{x^2}}$
9.	Simplificando nos queda de la siguiente manera.	$\boldsymbol{y = \frac{1}{2} + \frac{C}{e^{x^2}}}$
10.	La condición inicial está en el intervalo [0,1)	$2 = \frac{1}{2} + \frac{C}{e^{0^2}}$ $2 - \frac{1}{2} = \frac{C}{e^{0^2}}$ $\boldsymbol{\frac{3}{2} = C}$
11.	Sustituyendo en la ecuación nos queda de la siguiente forma.	$\boldsymbol{y = \frac{1}{2} + \frac{3e^{x^{-2}}}{2}}$
12.	Integramos a ambos lados	$\int 0 = \int Q'(y)$ $C = Q(y)$
13.	Sustituyendo f(x) en el segundo intervalo en la ecuación diferencial obtenemos	$\frac{dy}{dx} + 2xy = 0$
14.	Calculamos el factor de integración	$P(x) = 2x$ $F.I = e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$
15.	Multiplicando el factor de integración con la ecuación diferencial obtenemos.	$e^{x^2}\frac{dy}{dx} + 2xye^{x^2} = 0$ $\frac{d}{dx}[e^{x^2} * y] = 0$
16.	Ahora integramos a ambos lados.	$\int \frac{d}{dx}[e^{x^2} * y] = \int 0\,dx$ $e^{x^2} * y = C$
17.	Despejando y.	$\boldsymbol{y = Ce^{x^{-2}}}$
18.	Como la solución debe de ser continua.	$\frac{1}{2} + \frac{3e^{x^{-2}}}{2} = Ce^{x^{-2}}$
19.	Para x≥1	$\frac{1}{2} + \frac{3e^{-1}}{2} = Ce^{-1}$ $\boldsymbol{\frac{1}{2}e^{-1} + \frac{3}{2} = C}$

20.	Sustituyendo en la ecuación encontrada.	$y = \left(\frac{1}{2}e^{-1} + \frac{3}{2} =\right)e^{x^{-2}}$

La solución del problema con valores iniciales de tal forma que sea continua en x=1

R./

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{3e^{x^{-2}}}{2} & ,0 \leq x < 1 \\ \left(\frac{1}{2}e^{-1} + \frac{3}{2} =\right)e^{x^{-2}} & ,x \geq 1 \end{cases}$$