UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-114-1-M-1-00-2018_SC

CURSO:	**Matemática Intermedia 3**
SEMESTRE:	**Primero**
CÓDIGO DEL CURSO:	**114**
TIPO DE EXAMEN:	**Primer Parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**Febrero del 2018**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Josué Rabanales**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Josué Rabanales**
COORDINADOR:	**Inga. Vera Marroquín**

Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería
Josué Rabanales

Departamento de Matemática
Matemática Intermedia 3
I Semestre 2018

Febrero del 2018 **Primer Examen Parcial**

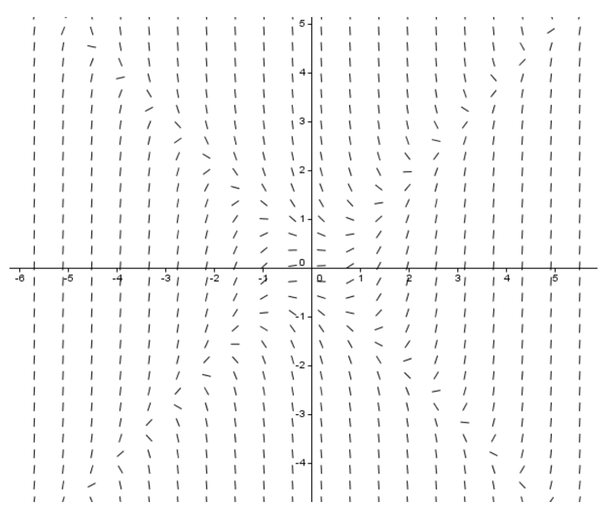
Instrucciones: Deje constancia clara y legible de sus procedimientos.

Tema 1: (10 puntos) Clasifique las siguientes ecuaciones diferenciales:

Ecuación	ORDEN	GRADO	LINEAL (SÍ O NO)
$\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$			
$2x^2y^{(6)} + 3y = \tan(x)$			
$(1-x)y'' - 4xy' + 5y = \cos(x)$			
$2y * y'' + x(y')^4 = Sin(x)$			

Tema 2: (10 puntos) Verifique si la solución particular $y = e^{2x}Cos(2x)$ es una solución de ecuación diferencial $y'' - 6y' + 13y = 0$.

Tema 3: (10 puntos) Para el campo de direcciones correspondiente a la ED $\frac{dy}{dx} = x^2 - y^2$ generado por computadora que se muestra en la gráfica, trace a mano una curva solución aproximada que pase por el punto y(0)=2.



Tema 4: (10 puntos) Determine la función $M(x,y)$ de tal forma que la ED sea exacta: $M(x,y)dx + \left(xe^{xy} + 2xy + \frac{1}{x}\right)dy = 0$

Tema 5 (20 puntos c/u): Resuelva, indicando el método utilizado y dejando constancia de todo su procedimiento.

a) $(10 - 6y + e^{-3x})dx - 2dy = 0$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{xy+2y-x-2}{xy-3y+x-3}$

c) Resuelva el problema con valores iniciales de tal forma que la solución sea continua.

$y' + P(x)y = 4x$, sujeto a $y(0) = 3$

Donde:

$$P(x) = \begin{cases} 2\,, & 0 \leq x \leq 1 \\ -\dfrac{2}{x}, & x > 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

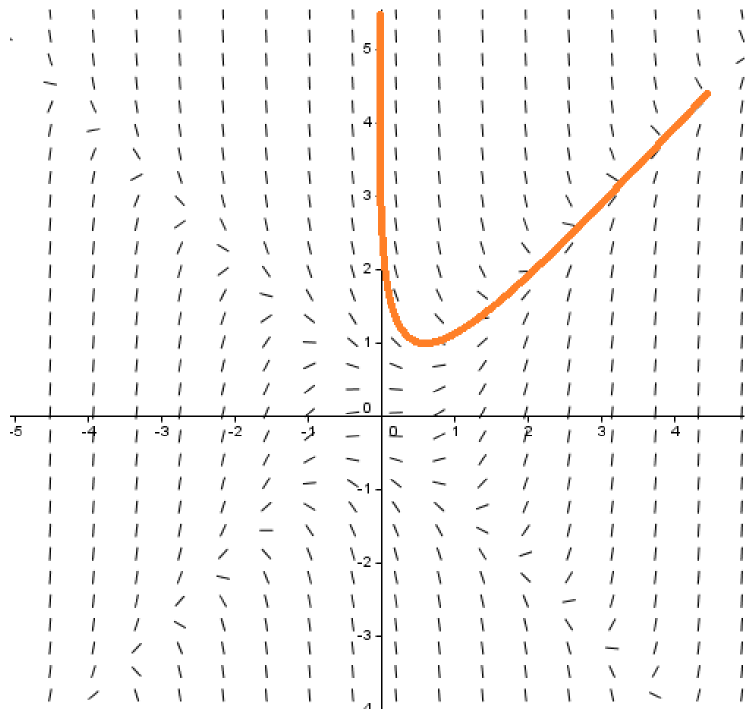
Tema 1: (10 puntos) Clasifique las siguientes ecuaciones diferenciales:

Ecuación	ORDEN	GRADO	LINEAL (SÍ O NO)
$\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$	**2**	**2**	**No**
$2x^2y^{(6)} + 3y = \tan(x)$	**6**	**1**	**Si**
$(1-x)y'' - 4xy' + 5y = \cos(x)$	**2**	**1**	**Si**
$2y * y'' + x(y')^4 = Sin(x)$	**2**	**1**	**no**

Tema 2: (10 puntos) Verifique si la solución particular $y = e^{2x}Cos(2x)$ es una solución de ecuación diferencial $y'' - 6y' + 13y = 0$.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Primero encontramos las expresiones que necesitamos para sustituir en la EDO al derivar la supuesta solución que nos están dando.	$y' = 2e^{2x}Cos(2x) - 2e^{2x}Sin(2x)$ $y'' = -8e^{2x}Sin(2x)$
2.	Sustituimos en la ecuación diferencial.	$-8e^{2x}Sin(2x) - 12e^{2x}Cos(2x) + 12e^{2x}Sin(2x)$ $+ 13e^{2x}Cos(2x) = 0$
3.	Simplificamos el lado izquierdo de la expresión anterior	$4e^{2x}Sin(2x) + e^{2x}Cos(2x) = 0$
4.	La expresión anterior es falsa, por lo que concluimos que no es una solución a la EDO.	R// No es una solución de la ecuación diferencial.

Tema 3: (10 puntos) Para el campo de direcciones correspondiente a la ED $\frac{dy}{dx} = x^2 - y^2$ generado por computadora que se muestra en la gráfica, trace a mano una curva solución aproximada que pase por el punto y(0)=2.



Tal como se ve en la gráfica, nuestra solución debe pasar por el punto (0,2) y ser tangente a cada una de las flechas.

Tema 4: (10 puntos) Determine la función $M(x, y)$ de tal forma que la ED sea exacta: $M(x, y)dx + \left(xe^{xy} + 2xy + \frac{1}{x}\right)dy = 0$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Para encontrar M utilizamos la siguiente propiedad de las ecuaciones exactas.	$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$
2.	Encontramos la derivada parcial de N con respecto de x:	$\frac{\partial N}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy} + 2y - \frac{1}{x^2}$

3.	Utilizamos la igualdad del paso uno e integramos de ambos lados:	$$\int dM = \int e^{xy} + xy * e^{xy} + 2y - \frac{1}{x^2} dy$$
4.	Integramos con respecto de y:	$$M(x,y) = \frac{1}{x}e^{xy} + ye^{xy} - \frac{1}{x}e^{xy} + y^2 - \frac{y}{x^2} + f(x)$$
5.	Simplificamos la expresión anterior	$$M(x,y) = ye^{xy} + y^2 - \frac{y}{x^2} + f(x)$$ Con f(x) una función solo de x arbitraria.

Tema 5 (20 puntos c/u): Resuelva, indicando el método utilizado y dejando constancia de todo su procedimiento.

a) $(10 - 6y + e^{-3x})dx - 2dy = 0$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Primero verificamos si es una ecuación diferencial exacta al obtener sus derivadas parciales.	$$\frac{\partial M}{\partial y} = -6$$ $$\frac{\partial N}{\partial x} = 0$$ Con lo cual concluimos que la ecuación no es exacta.
2.	Ahora intentamos buscar un factor integral que nos permita convertirla en exacta.	$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{-6-0}{-2}$$ Ya que es una función de una sola variable, entonces podemos utilizarla para nuestro factor de integración el cuál sería: $$e^{3x}$$
3.	Multiplicamos toda la ecuación por el factor integrante y volvemos a verificar si la ecuación ahora es exacta.	$$(10e^{3x} - 6ye^{3x} + 1)dx - 2e^{3x} = 0$$ Si hacemos prueba para saber si la ecuación es exacta: $$\frac{\partial M}{\partial y} = -6e^{3x} = \frac{\partial N}{\partial x}$$
4.	Ahora obtenemos la solución al integrar la ecuación diferencial.	$$\int 10e^{3x} - 6ye^{3x} + 1\, dx = \frac{10}{3}e^{3x} - 2ye^{3x} + x + f(y) + C_1$$ $$\int -2e^{3x} dy = -2ye^{3x} + g(x) + C_2$$
5.	De tal manera que la solución de la EDO es la siguiente.	R// $k = \frac{10}{3}e^{3x} - 2ye^{3x} + x$

$$b)\ \frac{dy}{dx} = \frac{xy + 2y - x - 2}{xy - 3y + x - 3}$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Primero, podemos ver que la expresión del lado derecho puede factorizarse fácilmente por factor común y agrupación.	$\frac{xy + 2y - x - 2}{xy - 3y + x - x} = \frac{(x + 2)(y - 1)}{(x - 3)(y + 1)}$
2.	Ahora que hemos factorizado, podemos hacer una separación de variables de la siguiente forma.	$\frac{y + 1}{y - 1} dy = \frac{x + 2}{x - 3} dx$
3.	Integramos de ambos lados de la ecuación.	$\int \frac{y + 1}{y - 1} dy = \int \frac{x + 2}{x - 3} dx$
4.	Ya que los numeradores y denominadores de ambos lados tienen el mismo grado, podemos aplicar la división larga.	$\int 1 + \frac{2}{y - 1} dy = \int 1 + \frac{5}{x - 3} dx$
5.	Efectuamos ambas integrales para obtener el resultado final.	R// $y + 2Ln\lvert y - 1\rvert = x + 5Ln\lvert x - 3\rvert + C$

b) Resuelva el problema con valores iniciales de tal forma que la solución sea continua.
$y' + P(x)y = 4x$, sujeto a $y(0) = 3$
Donde:

$$P(x) = \begin{cases} 2\,, & 0 \le x \le 1 \\ -\dfrac{2}{x}, & x > 1 \end{cases}$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Debemos resolver la ecuación para cada uno de los intervalos. Primero resolvemos para el intervalo $0 \le x \le 1$	$$y' + 2y = 4x$$ Para lo cual tenemos el factor integrante: $$e^{2x}$$ Al multiplicar toda la ecuación por el factor integrante: $$e^{2x}y' + 2e^{2x}y = 4xe^{2x}$$
2.	Integramos ambos lados de la ecuación.	$$d[ye^{2x}] = 4xe^{2x}$$ $$ye^{2x} = \int 4xe^{2x}dx$$ Al integrar por partes el lado derecho: $$ye^{2x} = 2xe^{2x} - e^{2x} + C$$ Simplificamos: $$y = 2x - 1 + Ce^{-2x}$$
3.	Al aplicar condiciones iniciales y(0) = 3:	$$3 = 2(0) - 1 + C$$ Entonces: $$y = 2x - 1 + 4e^{-2x}$$
4.	Ahora resolvemos para el otro intervalo $x > 1$	$$y' - \frac{2}{x}y = 4x$$ Para la cual tenemos el factor integrante: $$x^{-2}$$ Al multiplicar por toda la ecuación: $$\frac{d}{dx}[yx^{-2}] = \frac{4}{x}$$ Multiplicamos ambos lados por dx e integramos: $$yx^{-2} = 4Ln\|x\| + K$$ Ahora simplificamos: $$y = 4x^2Ln\|x\| + kx^2$$ Ya que debe ser continua: $$\lim_{x\to1^-} f = \lim_{x\to1^+} f$$ Entonces: $$1 + e^{-2} = k$$

5.	Por tanto nuestro nuestra respuesta:		$y = \begin{cases} 2x - 1 + 4e^{-2x} \quad para\ 0 \leq x < 1 \\ 4x^2 Ln\lvert x\rvert + (1 + 4e^{-2})x^2 \ para\ x > 1 \end{cases}$