

**UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA**

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

**CLAVE-114-1-M-2-00-2017**

---



<b>CURSO:</b>	<b>Matemática Intermedia 3</b>
<b>SEMESTRE:</b>	<b>Segundo</b>
<b>CÓDIGO DEL CURSO:</b>	<b>114</b>
<b>TIPO DE EXAMEN:</b>	<b>Primer Parcial</b>
<b>FECHA DE EXAMEN:</b>	<b>Agosto del 2017</b>
<b>RESOLVIÓ EL EXAMEN:</b>	<b>Axel Ruiz</b>
<b>DIGITALIZÓ EL EXAMEN:</b>	<b>Axel Ruiz</b>
<b>COORDINADOR:</b>	<b>Inga. Vera Marroquín</b>

Agosto del 2017

Primer Examen Parcial

**Instrucciones:** Deje constancia clara y legible de sus procedimientos.

**Tema 1: (20 puntos)** Dada la ecuación diferencial  $(2x + 2y)dx + M(x, y)dy = 0$

- Encuentre una función M tal que la ecuación sea exacta.
- Encuentre su solución.

**Tema 2: (40 puntos)** Resuelva las ecuaciones diferenciales:

- $\sqrt{x + y} = y'$
- $y' = \frac{3x+4y}{4x+3y}$
- $\frac{Ldi}{dt} + Ri = \begin{cases} E, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}, \quad i(0) = i_0$
- $ydx = (x^2y^2 - xy^2)dy$

**Tema 3: (20 puntos)** Verifique que la ecuación  $-2x^2y + y^2 = 1$  sea una solución de la ecuación diferencial  $2xydx + (x^2 - y)dy = 0$ .

**Tema 4: (20 puntos)** Clasifique las ecuaciones según tipo, linealidad y orden.

- $3xy' + 2xy = 0$
- $3x''y + 2x'y = y^2$
- $\frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt} = 0$
- $\sqrt{\frac{d^3y}{dx^3}} + 5\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^5 + \frac{e^x dy}{dx} = 3xy$

## SOLUCIÓN DEL EXAMEN

**Tema 1:** Dada la ecuación diferencial  $(2x + 2y)dx + M(x, y)dy = 0$

- a) Encuentre una función M tal que la ecuación sea exacta.
- b) Encuentre su solución.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Ya que la ecuación debe ser exacta, debe cumplir que: $\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x}$	$\frac{\partial}{\partial y}(2x + 2y) = 2$ $\frac{\partial M}{\partial x} = 2$
2.	Si integramos para obtener M	$M = 2x + f(y) + k$
3.	Por simplicidad tomaremos f(y) y k igual a cero.	<b>R// <math>M = 2x</math></b>
4.	Para resolver la ecuación debemos integrar con respecto a x y a y respectivamente.	$\int 2x + 2y dx = x^2 + 2xy + h(y)$ $+ k$ $\int 2xdy = 2xy + g(x) + k$
5.	De tal manera que la solución es:	<b>R// <math>c = x^2 + 2xy</math></b>

**Tema 2:** Resuelva las ecuaciones diferenciales:

a)  $\sqrt{x + y} = y'$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Utilizaremos una sustitución para realizar la ecuación.	$u = x + y$ $u' = 1 + y'$ $u' - 1 = y'$
2.	Sustituimos en la ecuación diferencial.	$u' - 1 = u^{\frac{1}{2}}$ $\frac{du}{dx} = u^{\frac{1}{2}} + 1$
3.	Realizamos una separación de variables e integramos.	$\int \frac{du}{u^{\frac{1}{2}} + 1} = \int dx$
4.	Para resolver la integral de la izquierda utilizaremos las sustituciones siguientes.	$s = \sqrt{u}$ $2sds = du$
5.	De manera que al sustituir en la integral obtenemos.	$2 \int \frac{s}{s + 1} ds$

6.	Realizamos fracciones parciales	$= 2 \int 1 - \frac{1}{s+1} ds$
7.	Integramos:	$= 2s - 2\text{Ln} s+1 $
8.	Ahora regresamos a las variables originales y obtenemos la respuesta.	$R// 2\sqrt{x+y} - 2\text{Ln} \sqrt{x+y}+1  = x + C$

$$b) y' = \frac{3x+4y}{4x+3y}$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Multiplicamos ambos lados de la ecuación por dx.	$(4x + 3y)dy - (3x + 4y)dx = 0$
2.	Haremos la prueba para saber si la ecuación es homogénea del mismo grado.	$M(tx, ty) = 4(tx) + 3(ty) = t(4x + 3y)$ $N(tx, ty) = -t(3x + 4y)$ De lo cual podemos decir que la ecuación es homogénea del mismo grado.
3.	Hacemos la sustitución: $y = ux$ $dy = udx + xdu$	$(4x + 3ux)(udx + xdu) = (3x + 4ux)dx$
4.	Al reducir la expresión anterior y agrupar al factorizar los diferenciales.	$3xdx(u^2 - 1) = -x^2(3u + 4)du$
5.	Separamos variables e integramos.	$-\int \frac{3}{x} dx = \int \frac{3u + 4}{u^2 - 1} du$
6.	Para resolverla integral de la derecha realizamos fracciones parciales y al resolver la integral obtenemos:	$-3\text{Ln} x  = \frac{3}{2}\text{Ln} u^2 - 1  - 2\text{Ln} u + 1 $ $+ 2\text{Ln} u - 1  + C$
7.	Regresamos a la variable original y	$R// -3\text{Ln} x  = \frac{3}{2}\text{Ln}\left \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1\right  - 2\text{Ln}\left \left(\frac{y}{x}\right) + 1\right  +$ $2\text{Ln}\left \left(\frac{y}{x}\right) - 1\right  + C$

$$c) \frac{Ldi}{dt} + Ri = \begin{cases} E, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}, i(0) = i_0$$

1.	Para el intervalo $0 \leq t \leq 1$ ponemos la EDO en forma estándar	$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$ Cuyo factor integrante es: $e^{\frac{R}{L}t}$
2.	Multiplicamos la ecuación por el factor integrante:	$\frac{d}{dt} \left[ e^{\frac{R}{L}t} i \right] = \frac{E}{L} e^{\frac{R}{L}t}$
3.	Multiplicamos ambos lados de la ecuación por dt e integramos, obteniendo el resultado:	$e^{\frac{R}{L}t} * i = \frac{E}{R} e^{\frac{R}{L}t} + C$
4.	Dividimos ambos lados de la ecuación por:	$i = \frac{E}{R} + C e^{-\frac{R}{L}t}$

	$e^{\frac{R}{L}t}$	
5.	Aplicamos las condiciones iniciales: $i(0) = i_0$	$i_0 = \frac{E}{R} + C$ Despejamos C: $C = i_0 - \frac{E}{R}$
6.	De tal manera que para el intervalo $0 \leq t \leq 1$ tenemos la solución:	$i(t) = \frac{E}{R} + \left(i_0 - \frac{E}{R}\right) e^{-\frac{R}{L}t}$
7.	Para el siguiente intervalo tenemos que resolver:	$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0$
8.	Cuyo factor integrante es el mismo que el anterior, obteniendo al multiplicar por toda la ecuación:	$\frac{d}{dt} \left[ e^{\frac{R}{L}t} * i \right] = 0$ $\int d \left[ e^{\frac{R}{L}t} * i \right] = \int 0 dt$
9.	Al multiplicar por dt en ambos lados de la ecuación y realizar la integral:	$i = ke^{-\frac{R}{L}t}$ Donde k es una constante.
10.	Por el fenómeno físico que representa la ecuación diferencial, el cual es un circuito RL, suponemos que i debe ser continua en todo su dominio, lo cual implica que:	$\lim_{t \rightarrow 1^-} i = \lim_{t \rightarrow 1^+} i$
11.	Al aplicar estos límites obtenemos:	$\frac{E}{R} + \left(i_0 - \frac{E}{R}\right) e^{-\frac{R}{L}} = ke^{-\frac{R}{L}}$
12.	Despejamos para obtener k de la ecuación anterior y obtenemos:	$k = \frac{E}{R} e^{\frac{R}{L}} + i_0 - \frac{E}{R}$
13.	Habiendo encontrado ambas soluciones tenemos la función completa:	$R// i(t) = \begin{cases} \frac{E}{R} + \left(i_0 - \frac{E}{R}\right) e^{-\frac{R}{L}t}, & 0 \leq t \leq 1 \\ \left[\frac{E}{R} e^{\frac{R}{L}} + i_0 - \frac{E}{R}\right] e^{-\frac{R}{L}t}, & t \geq 0 \end{cases}$

d)  $ydx = (x^2y^2 - xy^2)dy$

1.	Primero vamos a factorizar el lado derecho de la ecuación.	$ydx = y^2(x^2 - x)dy$
2.	Dividimos ambos lados de la ecuación por: $\frac{1}{y(x)(x-1)}$ E integramos de ambos lados de la ecuación	$\int \frac{1}{(x-1)x} dx = \int y dy$
3.	Del lado izquierdo aplicamos fracciones parciales.	$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$ $1 = A(x-1) + Bx$ De lo cual obtenemos el sistema: $A + B = 0$ $A = -1$ Entonces:

		$A = -1$ y $B = 1$
4.	De manera que el lado izquierda de la ecuación nos queda:	$\int \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1} dx = \int y dy$
5.	Por último realizamos las integrales.	R// $\ln x-1  - \ln x  = \frac{y^2}{2} + C$

**Tema 3:** Verifique que la ecuación  $-2x^2y + y^2 = 1$  sea una solución de la ecuación diferencial  $2xydx + (x^2 - y)dy = 0$ .

No.	Explicación	Operatoria
1.	Vamos a derivar nuestra supuesta solución con respecto de x	$-2x^2 \frac{dy}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} - 4xy = 0$
2.	Factorizamos los dy/dx obteniendo	$(-2x^2 + 2y) \frac{dy}{dx} - 4xy = 0$
3.	Multiplicamos ambos lados de la ecuación por dx:	$-2(x^2 - y)dy - 4xydx = 0$
4.	Multiplicamos ambos lados de la ecuación por (-1)	$2xydx + 2(x^2 - y)dy = 0$ Que es la ecuación diferencial.
5.	R// Desde la solución podemos ir a la ecuación diferencial, verificando por tanto que: $-2x^2y + y^2 = 1$ es una solución de $2xydx + (x^2 - y)dy = 0$ .	

**Tema 4:** Clasifique las ecuaciones según tipo, linealidad y orden.

a)  $3xy' + 2xy = 2xy^2$

b)  $3x''y + 2x'y = y^2$

c)  $\frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt} = 0$

d)  $\sqrt{\frac{d^3y}{dx^3}} + 5\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^5 + \frac{e^x dy}{dx} = 3xy$

Ecuación	Tipo	Lineal	Orden
$3x \frac{dy}{dx} + 2xy = 2xy^2$	EDO	NO	1
$3 \frac{d^2x}{dy^2} y + 2 \frac{dx}{dy} * y = y^2$	EDO	SI	2
$\frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt}$	EDO	SI	1
$\sqrt{\frac{d^3y}{dx^3}} + 5\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^5 + e^x \frac{dy}{dx} = 3xy$	EDO	NO	3