UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-114-1-V-1-00-2015

CURSO:	Matemática Intermedia 3
SEMESTRE:	Primero
CÓDIGO DEL CURSO:	114
TIPO DE EXAMEN:	Primer examen parcial
FECHA DE EXAMEN:	19 de febrero de 2015
NOMBRE DE LA PERSONA QUE RESOLVIÓ EL EXAMEN:	Luis Maldonado
NOMBRE DE LA PERSONA QUE REVISÓ EL EXAMEN:	Inga. Ericka Cano

Universidad de San Carlos Guatemala
Departamento de Matemática
Escuela de Ciencias
Guatemala, 19 de Febrero de 2015

Facultad de Ingeniería
Matemática Intermedia 3
Jornada vespertina

Primer Examen Parcial

Instrucciones: Trabaje de forma clara y ordenada dejando constancia de su procedimiento. <u>No se permite el uso de calculadora programable ni de dispositivos electrónicos. Apague el celular</u>. Al finalizar el examen debe entregar el temario.

Tema 1 (8 puntos)
Dadas las siguientes ecuaciones diferenciales, establecer el tipo, orden, grado y linealidad (Copie la tabla en el cuadernillo de trabajo)

Ecuación Diferencial	Tipo	Orden	Grado	Linealidad
a) $x\frac{d^4y}{dx^4} - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y = 0$				
b) $x^2dy + \left(y - xy - xe^x\right)dx = 0$				

Tema 2 (17 puntos)
Verifique que la solución general dada satisface la ecuación diferencial y posteriormente halle la solución particular que satisface las condiciones iniciales dadas

$$y''' + y' = 0; \quad y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 senx \; ; \quad y(\pi) = 0, \; y'(\pi) = 2, \; y''(\pi) = -1$$

Tema 3 (15 puntos)
Trace el campo de direcciones para la ecuación diferencial y los valores de "c" dados e identifique las isóclinas y grafique una posible curva solución

$$\frac{dy}{dx} = y - x^2 \; ; \qquad c: -2, -1, 0, 1, 2$$

Tema 4 (60 puntos)
Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales indicando el método que utilizó para resolverla

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$; (20 puntos)

b) $xdy + \left(6y - 3xy^{\frac{4}{3}}\right)dx = 0$; (20 puntos)

c) $x(x+y)y' + y(3x+y) = 0$; (20 puntos)

Nombre:________________________________
Número de Carnet:________________ Firma: ________________

SOLUCION DE EXAMEN

Tema 1 (8 puntos)

Dadas las siguientes ecuaciones diferenciales, establecer el tipo, orden, grado y linealidad (Copie la tabla en el cuadernillo de trabajo)

Ecuación Diferencial	Tipo	Orden	Grado	Linealidad
a) $x\frac{d^4y}{dx^4} - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y = 0$				
b) $x^2dy + \left(y - xy - xe^x\right)dx = 0$				

SOLUCION

a) Al escribir la ecuación diferencial en su forma estándar se obtiene:

$$\frac{d^4y}{dx} - \frac{2}{x}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{1}{x}y = 0$$

De esta forma se puede ver que se trata de una ecuación diferencial ordinaria, de cuarto orden, grado uno y no lineal, debido a que la primera derivada $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ es de grado 2, siendo necesaria la condición de que la variable dependiente y todas sus derivadas dentro de la ecuación diferencial sean de grado uno para que sea lineal.

b) Reordenando los términos de la ecuación diferencial se obtiene:

$$x^2\frac{dy}{dx} + (1-x)y - xe^x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{(1-x)}{x^2}y - \frac{1}{x}e^x = 0$$

Escrita de esta forma se ve claramente que es una ecuación diferencial ordinaria, de primer orden, grado uno y es lineal en la variable dependiente y.

De manera que la tabla queda definida como se muestra a continuación:

Ecuación Diferencial	Tipo	Orden	Grado	Linealidad
a) $x\frac{d^4y}{dx^4} - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y = 0$	EDO	Cuarto	Uno	No lineal
b) $x^2dy + \left(y - xy - xe^x\right)dx = 0$	EDO	Primero	Uno	Lineal

Tema 2 (17 puntos)
Verifique que la solución general dada satisface la ecuación diferencial y posteriormente halle la solución particular que satisface las condiciones iniciales dadas

$$y''' + y' = 0; \quad y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 senx \; ; \quad y(\pi) = 0\,, \quad y'(\pi) = 2\,, \quad y''(\pi) = -1$$

SOLUCION

La solución propuesta de la ecuación diferencial y sus primeras tres derivadas son:

$$y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x$$

$$y' = -c_2 \sin x + c_3 \cos x$$

$$y'' = -c_2 \cos x - c_3 \sin x$$

$$y''' = c_2 \sin x - c_3 \cos x$$

Sustituyendo las derivadas correspondientes en la ecuación diferencial se obtiene:

$$y''' + y' = 0$$

$$c_2 \sin x - c_3 \cos x - c_2 \sin x + c_3 \cos x = 0$$

$$0 = 0$$

De esta forma se comprueba que $y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x$ es solución de la ecuación diferencial.

Solución particular:

Las condiciones iniciales determinan las constantes c_1, c_2 y c_3. Para encontrarlas se sustituye en la solución y sus primeras dos derivadas como se muestra a continuación:

$y(\pi) = 0$

$$y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x$$

$$0 = c_1 + c_2 \cos \pi + c_3 \sin \pi$$

$$0 = c_1 - c_2 \qquad (1)$$

$y'(\pi) = 2$

$$y' = -c_2 \sin x + c_3 \cos x$$

$$2 = -c_2 \sin \pi + \; c_3 \cos \pi$$

$$c_3 = -2 \qquad (2)$$

$y''(\pi) = -1$

$$y'' = -c_2 \cos x - c_3 \sin x$$

$$-1 = -c_2 \cos \pi - c_3 \sin \pi$$

$$c_2 = -1 \qquad (3)$$

A partir de la ecuación (1) se sabe que $c_1 = c_2$, entonces $c_1 = -1$. Y la solución particular de la ecuación diferencial es:

$$\boxed{\mathbf{y = -1 - \cos x - 2 \sin x}}$$

Tema 3 (15 puntos)

Trace el campo de direcciones para la ecuación diferencial y los valores de "c" dados e identifique las isóclinas y grafique una posible curva solución

$$\frac{dy}{dx} = y - x^2 \quad ; \qquad c: -2, -1, 0, 1, 2$$

SOLUCIÓN

Campo direccional de la ecuación diferencial

Ecuación de isóclina:

$$\frac{dy}{dx} = y - x^2$$

$$f(x, y) = y - x^2$$

$$f(x, y) = c$$

$$y - x^2 = c$$

$$y = x^2 + c$$

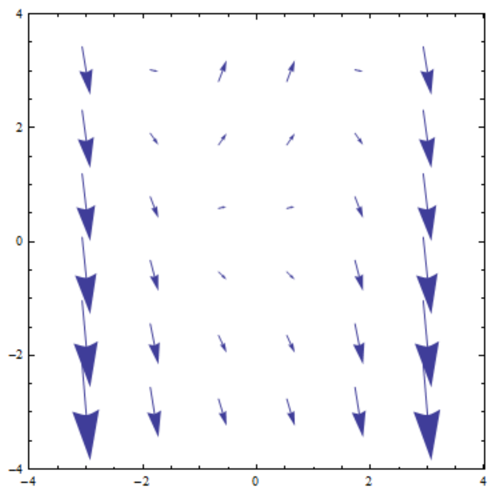
Cada isóclina es una parábola simétrica con respecto a y.

C	$\boldsymbol{y = x^2 + C}$
-2	$y = x^2 - 2$
-1	$y = x^2 - 1$
0	$y = x^2$
1	$y = x^2 + 1$
2	$y = x^2 + 2$

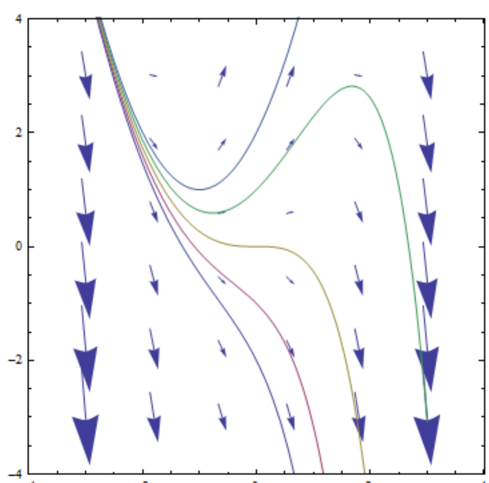
Se procede a calcular el valor de la pendiente y la dirección en cada punto (x,y). Para este caso se seleccionan los puntos -3<x<3, -3<y<3.

	x	y	y-x^2
cuadrante 1	1	1	0
	2	2	-2
	3	3	-6
cuadrante 2	-1	1	0
	-2	2	-2
	-3	3	-6
Origen	0	0	0
cuadrante 3	-1	-1	-2
	-2	-2	-6
	-3	-3	-12
cuadrante 4	1	-1	-2
	2	-2	-6
	3	-3	-12

El campo direccional resultante es el siguiente:



Y las isóclinas para los valores de c dados, cada una como posible solución son:



Tema 4 (60 puntos)
Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales indicando el método que utilizó para resolverla

a) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-x}{y+x}$; (20 puntos)

b) $xdy+\left(6y-3xy^{\frac{4}{3}}\right)dx=0$; (20 puntos)

c) $x(x+y)y'+y(3x+y)=0$; (20 puntos)

<u>SOLUCION</u>

a) $\frac{dy}{dx}=\frac{y-x}{y+x}$

Reordenando los términos de la ecuación diferencial se obtiene:

$$(x-y)dx+(x+y)dy=0$$

Se identifica a $\mathbf{M(x,y)=x-y}$ y a $\boldsymbol{N(x,y)=x+y}$.

$$\mathrm{M(tx,ty)=tx-ty=t(x-y)}$$

$$\mathrm{N(tx,ty)=tx+ty=t(x+y)}$$

Por lo tanto se comprueba que es una ecuación diferencial homogénea. Para resolverla se realiza la siguiente sustitución:

$$y=ux\ ,\quad dy=udx+xdu$$

$$(x-ux)dx+(x+ux)(udx+xdu)=0$$

$$xdx-uxdx+xudx+x^2du+u^2xdx+uxdu=0$$

Simplificando y agrupando términos se obtiene:

$$(u^2x+x)dx+(ux^2+x^2)du=0$$

$$x(u^2+1)dx+x^2(u+1)du=0$$

Resolviendo por el método de separación de variables:

$$-\frac{dx}{x}=\frac{1+u}{u^2+1}$$

$$\int\frac{1+u}{u^2+1}du=\int\frac{du}{u^2+1}+\int\frac{u}{u^2+1}du=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\tan^{-1} u + \frac{1}{2} ln|u^2 + 1| = -ln|x| + C$$

Luego se sustituye $u = \frac{y}{x}$:

$$\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2} ln\left|\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1\right| = -ln|x| + C$$

b) $xdy + \left(6y - 3xy^{\frac{4}{3}}\right)dx = 0$

Forma estándar:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{6}{x}y = 3y^{\frac{4}{3}}$$

De esta forma se observa que tiene la forma de la ecuación de Bernoulli con $n = \frac{4}{3}$. Por lo tanto se procede de la siguiente manera:

Se realizan las siguientes sustituciones:

$$u = y^{1-n} = y^{1-\frac{4}{3}}$$

$$u = y^{-\frac{1}{3}}$$

$$du = \frac{-1}{3} y^{-\frac{4}{3}} dy$$

Se aplica la regla de la cadena para determinar $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = -3y^{\frac{4}{3}}\frac{du}{dx}$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación diferencial se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{6}{x}y = 3y^{\frac{4}{3}}$$

$$-3y^{\frac{4}{3}}\frac{du}{dx} + \frac{6}{x}y = 3y^{\frac{4}{3}}$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{2}{x}u = -1$$

Factor integrante:

$$P(x) = -\frac{2}{x}$$

$$e^{\int P(x)dx} = e^{\int -\frac{2}{x}dx}$$

$$e^{-2\ln x} = x^{-2}$$

Luego se multiplica la ecuación diferencial por el factor integrante:

$$x^{-2}\left[\frac{du}{dx} - \frac{2}{x}u\right] = -x^{-2}$$

$$\frac{d}{dx}[u\,x^{-2}] = -x^{-2}$$

$$\int \frac{d}{dx}[u\,x^{-2}]dx = -\int x^{-2}dx$$

$$ux^{-2} = \frac{1}{x} + C$$

$$u = x + Cx^2$$

Finalmente su expresa la solución en términos de y:

$$y^{\frac{-1}{3}} = x + Cx^2$$

$$\boxed{\mathbf{y} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x + Cx^2}}\right)^{\mathbf{3}}}$$

c) $x(x+y)y' + y(3x+y) = 0$

$$x(x+y)dy + y(3x+y)dx = 0$$

En este caso, $M(x,y) = y(3x+y)$ y $N(x,y) = x(x+y)$.

Se verifica si es una ecuación diferencial homogénea realizando:

$$M(tx,ty) = ty(3tx+ty) = t^2y(3x+y)$$

$$N(tx,ty) = tx(tx+ty) = t^2x(x+y)$$

De esta forma se comprueba que es una ecuación diferencial homogénea, ya que las funciones M(x,y) y N(x,y), ambas son homogéneas de grado 2. Para resolverla se realiza la siguiente sustitución:

$$\mathrm{y} = \mathrm{ux}, \qquad dy = udx + xdu$$

$$x(x+ux)(udx+xdu) + ux(3x+ux)dx = 0$$

$$x(xudx + x^2du + u^2xdx + ux^2du) + 3ux^2dx + u^2x^2dx = 0$$

$$(x^2udx + x^3du + u^2x^2dx + ux^3du) + 3ux^2dx + u^2x^2dx = 0$$

Simplificando esta expresión se obtiene:

$$x^3du + ux^3du + 4x^2udx + 2u^2x^2dx = 0$$

$$\mathrm{x}^3(1+\mathrm{u})\mathrm{du} + \mathrm{x}^2(2u^2+4u)dx = 0$$

Luego se resuelve por el método de separación de variables:

$$\frac{1}{2}\int \frac{1+u}{u^2+2u}du = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1+u}{(u+1)^2-1}du = -\int \frac{dx}{x}$$

Para resolver esta integral se realiza la sustitución:

$$\mathrm{p} = (\mathrm{u}+1)^2, \qquad \mathrm{dp} = 2(\mathrm{u}+1)\mathrm{du}$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{p}-1} = -\int \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}}$$

Resolviendo esta ecuación se obtiene:

$$\frac{1}{4}ln|p-1| = -\ln x + C$$

$$\frac{1}{4}\ln|(u+1)^2-1| = -\ln x + C$$

Y finalmente la solución de la ecuación diferencial es:

$$\boxed{\frac{1}{4}\ln\left|\left(\frac{y}{x}+1\right)^2-1\right| = -\ln x + C}$$