UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-114-1-V-1-00-2017

CURSO:	**Matemática Intermedia 3**
SEMESTRE:	**Primero**
CÓDIGO DEL CURSO:	**114**
TIPO DE EXAMEN:	**Primer Examen Parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**22 de febrero de 2017**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Jorge Castañeda**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Jorge Castañeda**
REVISO EL EXAMEN:	**Ing. Mario López**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

Universidad de San Carlos de Guatemala
Departamento de Matemática
Escuela de Ciencias

Facultad de Ingeniería
Matemática Intermedia 3
Sección "Q"
Guatemala, 22 de febrero del 2017

Primer Examen Parcial

Nombre:	***Carnet:***

Instrucciones: Resolver los problemas que se presentan a continuación en forma clara, ordenada y dejando constancia del procedimiento.

Tema 1 (35 puntos)

A. Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$3(1+t^2)\frac{dy}{dt}-2ty(y^3-1)=0$$

Con $y(0)=-1$

Encontrar el dominio de la solución y hacer un esbozo de la gráfica de dicha solución.

Tema 2 (15 puntos)

A. Haciendo uso del método de isóclinas, y sabiendo que la variable independiente es "x", trazar el campo direccional para la siguiente ecuación diferencial: (Trazar las isóclinas cuyos elementos lineales tienen pendientes 2, 1, 0, -1 y -2).

$$x^2dx = ydx - dy$$

Para

$-2 \le x \le 2$ &

$-3 \le y \le 6$

B. Trazar la posible solución en el punto P(1,2).

Tema 3 (35 puntos)

Resolver la siguiente ecuación diferencial sin usar el método de ecuaciones homogéneas:

$$x(2y-x)dy-(x^2+y^2)dx=0$$

Tema 4 (15 puntos)

Si el sudario de Turín es el manto que cubrió a Jesús de Nazaret, ¿Qué porcentaje de carbono 14 (C-14) debió tener esta pieza en el año de 1,983?

Nota: Hacer un diagrama temporal para la solución de este problema.

Tema 1 (35 puntos)

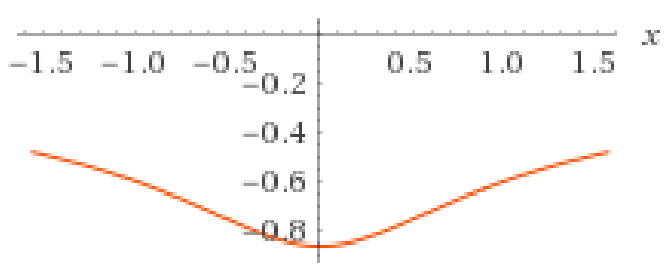
$$3(1+t^2)\frac{dy}{dt}-2ty(y^3-1)=0 \quad \text{Con } y(0)=-1$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Sabiendo que la ecuación de Bernoulli cuenta con esta forma	$\frac{dy}{dt}+P(t)y=f(t)y^n$
2.	Primero se busca definir en términos de la ecuación de Bernoulli.	$3(1+t^2)\frac{dy}{dt}+2ty=2ty^4$
3.	Dividimos $3(1+t^2)$ para tener la forma de la ecuación de Bernoulli	$\frac{dy}{dt}+\frac{2ty}{3(1+t^2)}=\frac{2ty^4}{3(1+t^2)}$
4.	Ahora debemos de definir nuestro n ya que sabemos que para el método de podemos utilizar la sustitución $u=\ y^{1-n}$ para poder reducir nuestra ecuación de Bernoulli a una ecuación lineal	$n=4$
5.	Ahora encontramos u	$u=\ y^{1-(4)}$ $u=\ y^{-3}$
6.	Procedemos a derivar a ambos lados para encontrar el equivalente de $\frac{dy}{dt}$.	$\frac{dy}{dt}=\frac{-1}{3}u^{\frac{-4}{3}}\frac{du}{dt}$
7.	Procedemos a sustituir los términos de la ecuación No. 3	$\frac{-1}{3}u^{\frac{-4}{3}}\frac{du}{dt}+\frac{2tu^{\frac{-1}{3}}}{3(1+t^2)}=\frac{2tu^{\frac{-4}{3}}}{3(1+t^2)}$
8.	Dividimos en $\frac{-1}{3}u^{\frac{-4}{3}}$ toda la ecuación	$\frac{du}{dt}+\frac{2tu}{(1+t^2)}=-\frac{2t}{(1+t^2)}$
9.	Determinamos nuestro $p(x)=\frac{2t}{(1+t^2)}$ Y procedemos a encontrar nuestro factor integrante	$F.I=\ e^{\int\frac{2t\,dt}{(1+t^2)}}$
10.	Resolvemos la integral	$F.I=\ e^{Ln\|(1+t^2)^{-1}\|}$ $F.I=\frac{1}{1+t^2}$

11.	Multiplicamos nuestra ecuación por el factor integrante por definición sabemos que el resultado automáticamente será $\frac{du}{dt}\left[e^{\int p(t)dt} * u\right] = e^{\int p(t)dt} * f(t)$ Sustituyendo valores en la resolución antes descrita nos queda de la siguiente manera.	$\frac{d\left[u * \frac{1}{1+t^2}\right]}{dt} = -\frac{2t}{(1+t^2)^2}dt$
12.	Ahora procedemos a integrar a ambos lados.	$\int \frac{d\left[u * \frac{1}{1+t^2}\right]}{dt}dt = \int -\frac{2t}{(1+t^2)^2}dt$
13.	Como resultado tendríamos	$\frac{u}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2} + c$
14.	Despejamos U	$u = 1 + c(1+t^2)$
15.	Regresando a la variable original sabiendo que $u = y^{-3}$.	$y^{-3} = 1 + c(1+t^2)$
16.	Encontramos el valor de c, sabiendo que t=0 y y=-1.	$-1^{-3} = 1 + c(1+0^2)$ c =-2
Despejando la variable y encontramos la solución		

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{(1-2*(1+t^2))}}$$

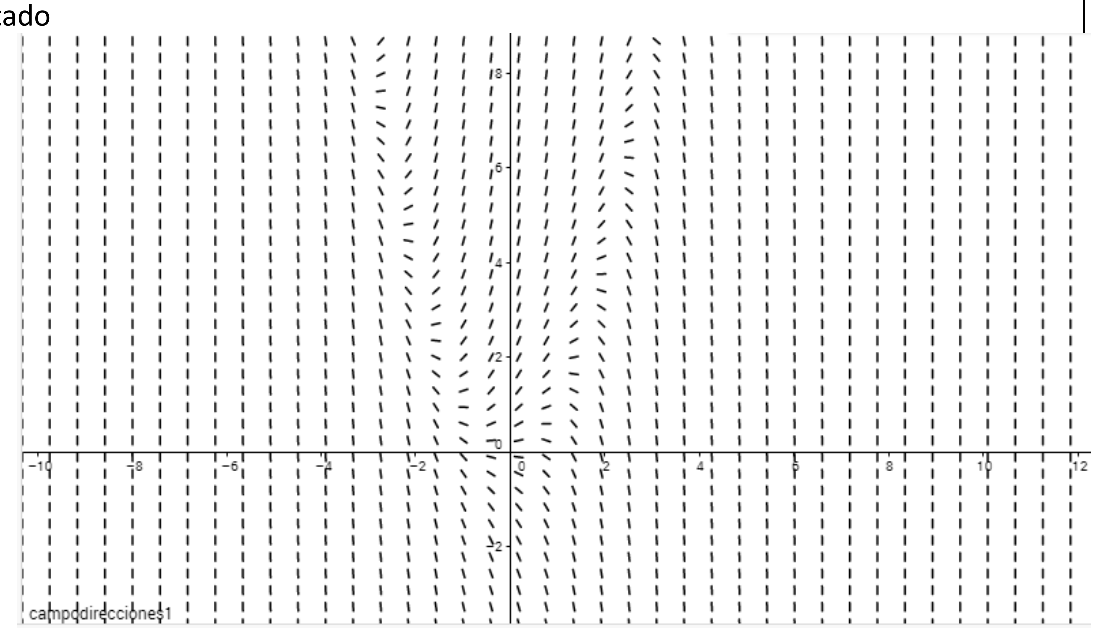
Dominio = $-\infty \leq t \leq \infty$



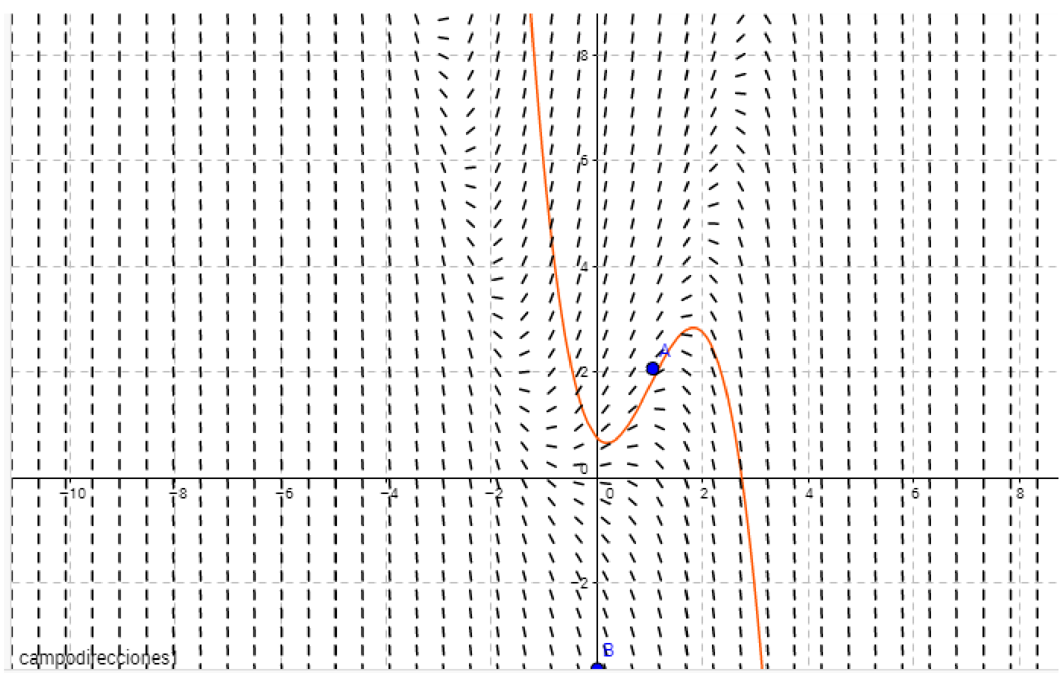
Tema 2 (15 puntos)

$x^2dx = ydx - dy$ Para $-2 \le x \le 2$ & $-3 \le y \le 6$

a)

<table>
<tr><th>No.</th><th>Explicación</th><th>Operatoria</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Primero se despeja $\frac{dy}{dx}$</td><td>$$\frac{dy}{dx} = y - x^2$$</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Recordamos que $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$
Donde $f(x,y)$ es la función pendiente y se iguala a una constante c que representa la pendiente de los segmentos de recta en la isóclina.</td><td>$$f(x,y) = y - x^2$$
$$c = y - x^2$$</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Despejando y</td><td>$$\mathrm{y} = \mathrm{x}^2 + c$$</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Realizamos la tabla de puntos que se utilizaran para realizar el campo direccional</td><td>
<table>
<tr><th>Pendiente</th><th>Isoclina</th></tr>
<tr><td>C</td><td>$y = x^2 + c$</td></tr>
<tr><td>-2</td><td>$y = x^2 - 2$</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>$y = x^2 - 1$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>$y = x^2$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$y = x^2 + 1$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$y = x^2 + 2$</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td colspan="3">Resultado

</td></tr>
</table>

b)

<table>
<tr><th>No.</th><th>Explicación</th><th>Operatoria</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Teniendo la fórmula utilizada en el inciso anterior</td><td>$y = x^2 + c$</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Teniendo el punto (1,2) se encuentra el valor de c</td><td>$c = 1$</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Sabiendo el campo direccional de la función $y = x^2 + 1$ se sigue el seguimiento de las direcciones para formar el trazo de la función</td><td>
<table>
<tr><td>C</td><td>$y = x^2 + c$</td></tr>
<tr><td>-2</td><td>$y = x^2 - 2$</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>$y = x^2 - 1$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>$y = x^2$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$y = x^2 + 1$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$y = x^2 + 2$</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td colspan="3">Resultado
</td></tr>
</table>

Tema 3 (35 puntos)

$$x(2y-x)dy-(x^2+y^2)dx=0$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Sabiendo que una ecuación diferencial exacta es aquella que cumple con las siguientes condiciones.	M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 $\frac{dM}{dy}=\frac{dN}{dx}$
2.	Se procede a calcular $\frac{dM}{dy}$ y $\frac{dN}{dx}$	$\frac{dN}{dx}=2y-2x$ $\frac{dM}{dy}=-2y$
3.	Como se puede observar My y Nx no son igual a lo que se procede a experimentar si son ecuaciones reducidas a exactas. Con la formula $\frac{My-Nx}{N}$	$\frac{-2y-2y+2x}{x(2y-x)}=$ $=\frac{-2(2y-x)}{x(2y-x)}=-\frac{2}{x}$
4.	Determinamos nuestro $p(x)=\frac{-2}{x}$ Y procedemos a encontrar nuestro factor integrante	$F.I=\ e^{\int\frac{-2\,dx}{x}}$
5.	Resolvemos la integral	$F.I=\ e^{Ln\|(x)^{-2}\|}$ $F.I=\frac{1}{x^2}$
6.	Multiplicamos nuestra ecuación por el factor integrante	$\frac{2y-x}{x}dy-\frac{x^2+y^2}{x^2}dx=0$
7.	Se procede a calcular $\frac{dM}{dy}$ y $\frac{dN}{dx}$ nuevamente	$\frac{dN}{dx}=\frac{-2y}{x^2}$

		$$\frac{dM}{dy} = \frac{-2y}{x^2}$$ Si son exactas
8.	Como ahora nuestra ecuación es exacta se procede a integrar $\int My\,dx$ y $\int Nx\,dy$	$$\int \frac{-(x^2+y^2)}{x^2}dx = \frac{y^2}{x} - x$$ $$\int \frac{2y-x}{x}dy = \frac{y^2}{x} - y$$

Se procede a copiar los términos de cada solución de la integral y si existen términos iguales solamente se copian una vez.

$$f(x,y) = \frac{y^2}{x} - x - y$$

Pero la solución es

$$f(x,y) = c$$

$$x + y - \frac{y^2}{x} = c$$

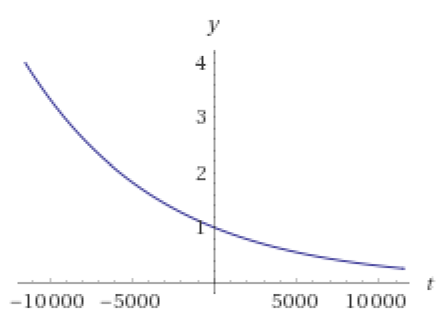
Tema 4 (15 puntos)

Si el sudario de Turín es el manto que cubrió a Jesús de Nazaret, ¿Qué porcentaje de carbono 14 (C-14) debió tener esta pieza en el año de 1,983?

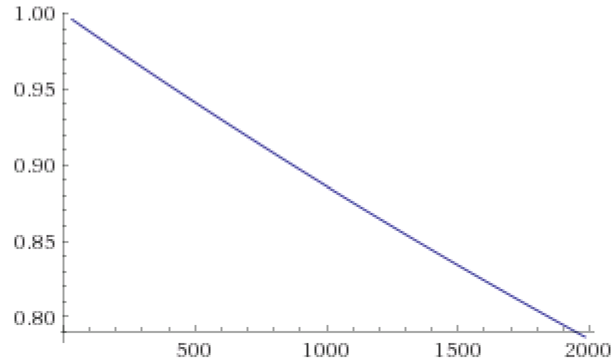
No.	Explicación	Operatoria
1.	Sabiendo que el nacimiento de Jesús fue en el año 0 y murió a los 33, en el año 1983, han pasado 1950 años. Utilizando el modelo de decaimiento y crecimiento	$$\frac{dA}{dt} = kA$$
2.	por el método de variable separadas, Procedemos a despejar todos los términos que tienen A para dejarlos todos con el diferencial de A, y efectuamos el mismo procedimiento para t	$$\frac{1}{A}dA = kdt$$
3.	Procedemos a integrar los dos lados de la ecuación	$$\int \frac{1}{A}dA = \int kdt$$ $$ln\|A\| = kt + c1$$

4.	Despejamos A	$A = C_2 e^{kt}$
5.	En t = 0; A = Ao entonces	$A_0 = C_2 e^{k0}$ $C_2 = Ao$ $A = Aoe^{kt}$
6.	Procedemos a encontrar la constante K de la ecuación. La vida media del carbono es 5730 años por lo tanto $A = \frac{Ao}{2}$	$\frac{A_0}{2} = A_0 e^{k(5730)}$ $\frac{1}{2} = e^{5730k}$ $k = \frac{-ln\|2\|}{5730}$
7.	Ya contando con la ecuación procedemos a evaluarla en la t =1950	$A = Aoe^{\frac{-ln\|2\|}{5730}*1950}$
Respuesta $0.789869Ao$ Por lo que $A \approx 78.99\%$ de Ao.		

Plots:



(t from −11 460 to 11 460)



1.00
0.95
0.90
0.85
0.80
500
1000
1500
2000