UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-114-1-V-1-00-2018_sM

CURSO:	**Matemática Intermedia 3**
SEMESTRE:	**Primero**
CÓDIGO DEL CURSO:	**114**
TIPO DE EXAMEN:	**Primer Examen Parcial**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Albert Miguel Chuy**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Albert Miguel Chuy**
REVISÓ EXAMEN:	**Ing. Francisco García**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

Primer Examen Parcial

INSTRUCCIONES:

- No se permite el uso de teléfono o dispositivos electrónica durante el examen.
- Deje constancia de todo su procedimiento. Respuestas sin procedimiento no tendrán validez.
- Para tener derecho a revisión sus respuestas deben estar escritas con lapicero.

TEMA No. 1 (10 puntos)

Escriba las condiciones que debe cumplir una E.D. para ser lineal.

TEMA No. 2 (10 puntos)

Verifique si la solución particular $\boldsymbol{y = 2x^2e^{2x}}$ es una solución de la Ecuación Diferencial $\boldsymbol{y'' - 2y' + y = e^x}$.

TEMA No. 3 (10 puntos)

$\boldsymbol{y = 1/(1 + Ce^{-x})}$ representa una familia de soluciones de un parámetro para la E.D. $\frac{dy}{dx} = y - y^2$. Encuentre y grafique una solución del PVI de primer orden que incluya esta E.D. y la condición inicial $\boldsymbol{y(0) = \frac{-1}{3}}$

TEMA No. 4 (10 puntos)

Encuentre el valor de $\boldsymbol{k}$ de manera que la E.D. sea exacta. Luego resuelva la E.D.

$$\boldsymbol{(6xy^3 + \cos y)dx + (2kx^2y^2 - x\sin y)dy = 0}$$

TEMA No. 4 (20 puntos c/u)

Resuelva, indicando el **método utilizado** y dejando constancia de **todo** su procedimiento.

1. $(y^2 + xy^3)dx + (5y^2 - xy + y^3\sin y)dy = 0$
2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 - 1}{x^2 - 1}$
3. $(x + 1)\dfrac{dy}{dx} + y = \ln x$; sujeto a $y(1) = 10$

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

TEMA NO. 1 (10 puntos)
Describa las condiciones que debe cumplir una E.D. para ser lineal.

1. La función F es lineal si, y,y', ... , y^n es lineal.
2. La variabla dependiente y así como tods sus derivadas y', y'',...,y^n son de primer grado, es decir, la potencia de cada uno de los términos que involucran a y es 1.
3. Los coeficientes a_0, a_1, ...,a_n de y, y',...,y^n dependen a lo sumo de la variable independiente x.
4. La función F es lineal si no se encuentra ninguna funcón tal como $\sin$, $\cos$.

TEMA No. 2 (10 puntos)
Verifique si la solución particular $\boldsymbol{y = 2x^2e^{2x}}$ es una solución de la Ecuación Diferencial $\boldsymbol{y'' - 2y' + y = e^x}$.

No.	**Explicación**	**Operatoria**
1.	Para comprobar si es solución de la E.D., se deriva n veces la solución particular, donde n, es el orden de la E.D.	$y' = 4x^2e^{2x} + 4xe^{2x}$ $y'' = 8x^2e^{2x} + 16xe^{2x} + 4e^{2x}$
2.	Se sustitutyen las dos derivadas anteriores en la E.D., luego se simplifica para comprobar si los dos miembros de la E.D. son iguales.	$8x^2e^{2x} + 16xe^{2x} + 4e^{2x}$ $-8x^2e^{2x} - 8xe^{2x} + 2x^2e^{2x} = e^x$
3.	Se simplifica.	$8xe^{2x} + 4e^{2x} + 2x^2e^{2x} = e^x$
4.	Como se observa al momento de simplificar, los dos miembros de la E.D. no quedan iguales, entonces, la solución particular no es solución de la E.D.	*NO ES SOLUCION*

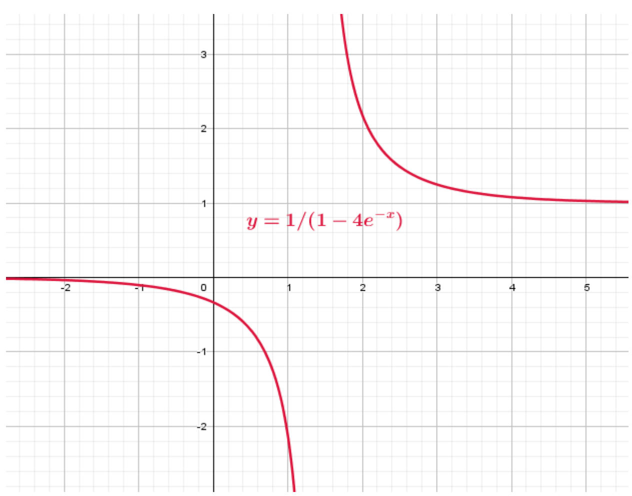
Respuesta: **La solución particular $\boldsymbol{y = 2x^2e^{2x}}$ no es solución de la E.D. $\boldsymbol{y'' - 2y' + y = e^x}$.**

TEMA No. 3 (10 puntos)

$\boldsymbol{y = 1/(1 + Ce^{-x})}$ representa una familia de soluciones de un parámetro para la E.D. $\dfrac{dy}{dx} = y - y^2$. Encuentre y grafique una solución del PVI de primer orden que incluya esta E.D. y la condición inicial $\boldsymbol{y(0) = \dfrac{-1}{3}}$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se sustituye la condición inicial en $y = 1/(1 + Ce^{-x})$ para encontrar el valor de C	$\dfrac{-1}{3} = \dfrac{1}{1 + Ce^{0}}$
2.	Se simplifica y se encuentra el valor de C.	$C = -4$
3.	Se ecuentra la solución.	$y = \dfrac{1}{1 - 4c^{-x}}$
4.	Se grafica.	

Respuesta:



TEMA No. 4 (10 puntos)

Encuentre el valor de $\boldsymbol{k}$ de manera que la E.D. sea exacta. Luego resuelva la E.D.

$$\boldsymbol{(6xy^3 + \cos y)dx + (2kx^2y^2 - x\sin y)dy = 0}$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Para encontrar el valor de $\boldsymbol{k}$, y que la E.D. sea exacta la $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$.	$M_{(x,y)} = 6xy^3 + \cos y$ $N_{(x,y)} = 2kx^2y^2 - x\sin y$
2.	Se deriva parcialmente $M_{(x,y)}$ y $N_{(x,y)}$.	$\dfrac{\partial M}{\partial y} = 18xy^2 - \sin y$ $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 4kxy^2 - \sin y$
3.	Se igualan las dos derivadas parciales y se simplifica para encontrar el valor de k.	$18xy^2 - \sin y = 4kxy^2 - \sin y$ $k = 9/2$
4.	Se sustituye el valor de k en la E.D. original.	$(6xy^3 + \cos y)dx + (9x^2y^2 - x\sin y)dy = 0$
5.	Se resuelve la E.D.	$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 6xy^3 + \cos y$
6.	Se integra con respecto de x.	$f(x,y) = 3x^2y^3 + x\cos y + g(y)$
7.	Se deriva con respecto de y.	$f'_y(x,y) = 9x^2y^2 - x\sin y + g'(y)$
8.	Tenemos que $f'(x,y) = N(x,y)$.	$9x^2y^2 - x\sin y + g'(y) = 9x^2y^2 - x\sin y$
9.	Por lo tanto.	$g'(y) = 0$
10.	Se integra $g'(y)$ con respecto de y.	$g(y) = C$

Respuesta: **El valor de k, es $k = 9/2$**
La solución del sistema es: $3x^2y^3 + x\cos y = C$

TEMA No. 5 (20 puntos c/u)

Resuelva, indicando el **método utilizado** y dejando constancia de **todo** su procedimiento.

1. $(y^2 + xy^3)dx + (5y^2 - xy + y^3 \sin y)dy = 0$
2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 - 1}{x^2 - 1}$
3. $(x + 1)\dfrac{dy}{dx} + y = \ln x$; sujeto a $y(1) = 10$

$$\boldsymbol{(y^2 + xy^3)dx + (5y^2 - xy + y^3 \sin y)dy = 0}$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se utilizará el método de reducible a exacta, para eso se comprueba si la E.D. es exacta, donde $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$	$2y + 3xy^2 \neq -y$
2.	Como no son iguales se utilizará la siguiente definición para lograr que sean iguales.	$\mu(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy}$
3.	Se encontrará primero $\dfrac{N_x - M_y}{M}$ y se simplifica.	$= \dfrac{-y - 2y - 3xy^2}{y^2 + xy^3}$ $= \dfrac{-3y(1 + xy)}{y^2(1 + xy)}$ $= \dfrac{-3}{y}$
4.	Se encuentra el factor integrante $\mu(y)$.	$= e^{\int \frac{-3}{y} dy}$ $= e^{-3\ln y}$ $= e^{\ln y^{-3}}$ $= \dfrac{1}{y^3}$

No.	Explicación	Operatoria
5.	Se multiplica $\mu(y)$ por toda la E.D. original.	$\frac{1}{y^3} \cdot [(y^2 + xy^3)dx$ $+(5y^2 - xy + y^3 \sin y)dy = 0]$
6.	Se simplifica.	$\left(\frac{1}{y} + x\right) dx + \left(\frac{5}{y} - \frac{x}{y^2} + \sin y\right) dy = 0$
7.	Se comprueba si la E.D. es exacta.	$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} = \frac{\partial N}{\partial x}$
8.	Se resuelve la E.D., integramos con respecto de x, $f(x, y) = \int M(x, y)dx$	$\int \frac{1}{y} + xdx = \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + g(y)$
9.	Se deriva con respecto de y.	$f'_y(x, y) = -\frac{x}{y^2} + g'(y)$
10.	Tenemos que $f'_y(x, y) = N(x, y)$.	$-\frac{x}{y^2} + g'(y) = \frac{5}{y} - \frac{x}{y^2} + \sin y$
11.	Por lo tanto.	$g'(y) = \frac{5}{y} + \sin y$
12.	Se integra $g'(y)$ con respecto de y.	$g(y) = 5 \ln y - \sin y + C$
13.	La solución de la E.D. es	$\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + 5 \ln y - \cos y = C$

Respuesta: $\boldsymbol{\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + 5 \ln y - \cos y = C}$

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-1}{x^2-1}}$$

No.	**Explicación**	**Operatoria**
1.	Se utilizará el método de separción de variables.	$\frac{dy}{y^2-1} = \frac{dx}{x^2-1}$
2.	Se factorizan los productos de los dividendos en ambos miembros de la E.D.	$\frac{dy}{(y+1)(y-1)} = \frac{dx}{(x+1)(x-1)}$
3.	Se aplica fracciones parciales.	$\frac{1}{(y+1)(y-1)} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y-1}$ $1 = A(y-1) + B(y+1)$ $1 = Ay - A + By + B$ $1 = y(A+B) + (-A+B)$
4.	Se encuentran los valores de A y B.	$A = -1/2 \quad B = 1/2$
5.	Estos mismos valores de A y B se toman para las fracciones parciales del lado de x ya que las fracciones parciales son iguales.	$\left(\frac{\frac{1}{2}}{y-1} - \frac{\frac{1}{2}}{y+1}\right) dy = \left(\frac{\frac{1}{2}}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}}{x+1}\right) dx$
6.	Se integra en ambos lados, dando como resultado lo siguiente.	$\frac{1}{2}\ln(y-1) - \frac{1}{2}\ln(y+1)$ $= \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x+1) + C$
7.	Se simplifica la solución de la E.D. para despejar y. Se agregará $\frac{1}{2}$ ln a C, con esto cambiaremos de variable a D, que sigue siendo una contante.	$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{y-1}{y+1}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \frac{1}{2}\ln D$

No.	Explicación	Operatoria
8.	Se simplifica.	$\ln\left(\frac{y-1}{y+1}\right) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \ln D$
9.	Se agrupan ln y se termina de simplificar.	$\ln\left(\frac{y-1}{y+1}\right) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) D$ $e^{\ln\left(\frac{y-1}{y+1}\right)} = e^{\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) D}$ $\frac{y-1}{y+1} = \frac{x-1}{x+1} D$ $y - 1 = (y+1)\frac{x-1}{x+1} D$ $y - 1 = y\left(\frac{x-1}{x+1} D\right) + \frac{x-1}{x+1} D$ $y - y\left(\frac{x-1}{x+1} D\right) = \frac{x-1}{x+1} D + 1$ $y\left(1 - \frac{x-1}{x+1} D\right) = \frac{x-1}{x+1} D + 1$ $y = \frac{\frac{x-1}{x+1} D + 1}{1 - \frac{x-1}{x+1} D}$

Respuesta: $\boldsymbol{y(x) = \frac{\frac{x-1}{x+1} D + 1}{1 - \frac{x-1}{x+1} D}}$

$$\boldsymbol{(x+1)\frac{dy}{dx}+y=\ln x \text{ ; sujeto a } y(1)=10}$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se manipula la ecuación para poder ver con qué método la podemos resolver.	$\left((x+1)\dfrac{dy}{dx}+y=\ln x\right)\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$
2.	Al simplificarla, se puede observar que es una E.D. lineal.	$\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{x+1}y=\dfrac{\ln x}{x+1}$
3.	Se encuentra el F.I.	$F.I.=e^{\int\left(\frac{1}{x+1}\right)dx}$ $=e^{\ln\|(x+1)\|}$ $=x+1$
4.	Se resuelve la E.D.	$y'(x+1)+y=\ln x$ $\dfrac{\partial}{\partial x}[y(x+1)]=\ln x$ $y(x+1)=\int\ln x dx$ $y(x+1)=x\ln x-x+C$
5.	Resuelta la E.D., sustituimos la condición dada para encontrar el valor de la constante C.	$10(1+1)=1\ln 1-1+C$ $20=-1+C$ $C=21$
6.	La solución de E.D. es	$y(x+1)=x\ln x-x+21$ $y(x)=\dfrac{x\ln x-x+21}{x+1}$

$$\boxed{\text{Respuesta: } \boldsymbol{y(x) = \frac{x\ln x - x + 21}{x+1}}}$$