UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-114-1-V-01-2-00-2017

CURSO:	**Matemática Intermedia 3**
SEMESTRE:	**Segundo**
CÓDIGO DEL CURSO:	**114**
TIPO DE EXAMEN:	**Primer examen parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**Segundo semestre 2017**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Hilda Nelly Tórtola Morales**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Hilda Nelly Tórtola Morales**
COORDINADOR:	**Ing. Vera Marroquín**

CAROLINA ACADEMIA COACTEMALENSIS INTER CETERAS ORBIS CONSPICUA

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL

MATEMÁTICA INTERMEDIA III

TEMA 1 25 pts.	Antes del mediodía el cuerpo de una aparente víctima de un homicidio se encuentra en un cuarto que se conserva a temperatura constante de 70°F. A mediodía, la temperatura del cuerpo es de 80°F y a las 13:00 es de 75°F. Considera que la temperatura del cuerpo en el momento de la muerte era de 98.6°F y que se ha enfriado de acuerdo con la ley de Newton ¿Cuál fue la hora de muerte?

TEMA 2 25 pts.	Un tanque de 400 gal contiene inicialmente 100 gal de salmuera, la cual contiene 50 lb de sal. Entra salmuera, cuya concentración es de 1 lb de sal por galón a razón de 5 gal/s, y loa salmuera mezclada en el tanque se derrama a una razón de 3 gal/s. ¿Qué cantidad de sal contendrá el tanque cuando esté lleno de salmuera?

TEMA 3 25 pts.	El isótopo radioactivo del plomo Pb-209, decae a una rapidez proporcional a la cantidad presente en el tiempo t y tiene un vida media de 3.3 horas. Si al inicio está presente un gramo de este isótopo ¿Cuánto tiempo tardará en desaparecer el 90% del plomo?

TEMA 4 25 pts.	Se aplica una fuerza electromotriz de 100 v a un circuito en serie RC en el que la resistencia es de 200 ohms y la capacitancia es de 10^{-4} farads. Encuentre la carga q(t) en el capacitor si q(0)=0. Además encuentre la función de corriente i(t).

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

TEMA 1 (25 puntos):

<table>
<tr><th></th><th>Explicación</th><th>Operatoria</th></tr>
<tr>
<td>A.</td>
<td>
Se debe saber la ecuación diferencial de la ley de newton para poder determinar el modelo a utilizar.

Se hace uso del método de variables separables y se integra de ambos lados luego se aplica logaritmo natural y se despeja para obtener la temperatura respecto del tiempo. (En el problema la temperatura ambiente es de 70°F).

Luego con los datos del problema se ordenan y se asignan a donde corresponden, sabemos que a mediodía tenemos una temperatura de 80°F y una hora más tarde 75, por lo que mediodía será x y 13:00 será x+1.

Con el primer dato se determina el valor de proporción C, luego se procede a utilizar los otros dos datos y se despeja para k para poder unir ambas ecuaciones.

Al encontrar x podemos determinar la hora de muerte dado que sabemos que paso x tiempo después de la muerte, como resultado obtenemos 1 hora con 31 minutos y en x era mediodía por lo que si le restamos la hora y 31 minutos sabremos la hora de muerte.

La victima muere a las 10:29 AM.
</td>
<td>

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$
$$\int \frac{dT}{T - T_m} = \int kdt$$
$$\ln(T - T_m) = kt$$
$$T - T_m = e^{kt}$$
$$\underline{T(t) = Ce^{kt} + T_m}$$

<table>
<tr><th>t</th><th>0</th><th>X</th><th>X+1</th></tr>
<tr><td>T</td><td>98.6</td><td>80</td><td>75</td></tr>
<tr><td>Horas</td><td>¿?</td><td>12:00</td><td>13:00</td></tr>
</table>

➔ Inicial:

$$98.6 = \mathrm{C}e^{0} + 70$$
$$28.6 = \mathrm{C}$$
$$T(t) = 28.6e^{kt} + 70$$

➔ Mediodía:

$$80 = 28.6e^{kx} + 70$$
$$\ln\left(\frac{80 - 70}{28.6}\right) = k\,x$$

➔ 13:00 :

$$75 = 28.6e^{k(x+1)} + 70$$
$$\ln\left(\frac{75 - 70}{28.6}\right) = k\,(x + 1)$$

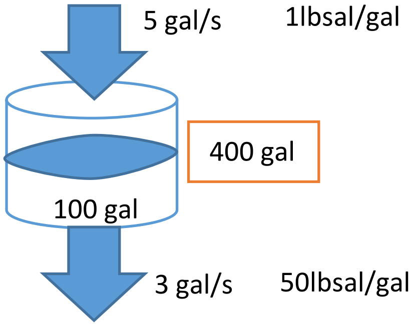
➔ Uniendo mediodía y 13:00 :

$$\frac{\ln\left(\frac{75 - 70}{28.6}\right)}{x + 1} = \frac{\ln\left(\frac{80 - 70}{28.6}\right)}{x}$$

$$\frac{\ln\left(\frac{75 - 70}{28.6}\right)}{\ln\left(\frac{80 - 70}{28.6}\right)}x = x + 1$$
$$1.6596x - x = 1$$
$$x = 1.5161 = 1\ hora\ con\ 31\ minutos$$

La víctima murió a las 10:29 AM
</td>
</tr>
</table>

TEMA 2 (25 puntos):

	Explicación	**Operatoria**
A.	Se debe de conocer la ecuación diferencial de mezclas, luego de tener la ecuación con los valores del problema se procede a utilizar el método de ecuación lineal para resolver, se obtiene el factor integrante y se resuelve para obtener el modelo a utilizar. Luego se determina la constante por medio del valor inicial del problema que dice que A(0) = 50. Para el tanque lleno se hace uso de la ecuación que sé que muestra y se despeja para el tiempo. Una vez determinado el tiempo se ingresa al modelo determinado y se obtiene el resultado.	 MEZCLAS: $\frac{dA}{dt} = Re * Ce - Rs * Cs$ $Cs = \frac{A}{cap+(Re-Rs)t} = \frac{A}{100+(5-3)t}$ $\frac{dA}{dt} = (5)(1) - (3)\frac{A}{2(50+t)}$ $\frac{dA}{dt} + \frac{3\,A}{2(50+t)} = 5$ $F.I = e^{\int \frac{3}{2(50+t)}} = (50+t)^{\frac{3}{2}}$ $\int \frac{d}{dt}\left[(50+t)^{\frac{3}{2}} A\right] = \int 5(50+t)^{\frac{3}{2}}\, dt$ $(50+t)^{\frac{3}{2}} A = 2(50+t)^{\frac{5}{2}} + c$ $A = 2(50+t) \; + c(50+t)^{-\frac{3}{2}}$ $50 = 2(50) \; + c(50)^{-\frac{3}{2}}$ $C = -17677.67$ $A = 2(50+t) \; - 17677.67\,(50+t)^{-\frac{3}{2}}$ Tanque lleno: $V = V_0 + (fc - fs)t$ $400 = 100 + 2t$ $t = 150\ seg$ $A = 2(50+150) \; - 17677.67\,(50+150)^{-\frac{3}{2}}$ $\boxed{A = 393.75\ lb\ \ de\ sal}$

TEMA 3 (25 puntos):

	Explicación	**Operatoria**
A.	Sabiendo la ecuación diferencial del decrecimiento poblacional se usa variables separables para obtener el modelo apropiado para este caso. Con los datos de vida media se puede determinar la constante k de esta población. Luego sabiendo que cuando decaiga un 90% solo habrá 10% de población se hace uso de esos datos y se determina el tiempo requerido.	$\frac{dx}{dt} = kx$ $\int \frac{dx}{x} = \int kdt$ $\ln(x) = kt + D$ $\mathrm{x} = Ae^{kt}$ ➔ Vida media: $\frac{A}{2} = A\ e^{k0.33}$ $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{k}{3}$ $k = -0.21$ ➔ Cuando solo quede el 10% $(1)(0.1) = e^{-0.21t}$ $\frac{\ln(0.1)}{-0.21} = t$ $\boxed{t = 10.96\ seg}$

TEMA 4 (25 puntos):

	Explicación	**Operatoria**
A.	Sabiendo la ecuación diferencial de un circuito en serie RC, se utiliza el método de ecuación lineal para la determinación del modelo adecuado. Luego se determina la constante debido a que en el problema se dice que la carga es 0 en el tiempo 0. Luego se procede a derivar para encontrar la ecuación de corriente.	$Ri + \frac{1}{C}\int idt = E(t)$ $200\frac{dq}{dt} + 10000q = 100$ $\frac{dq}{dt} + 50q = \frac{1}{2}$ $\int \frac{d}{dt}[e^{50t}q] = \int \frac{e^{50t}}{2}\, dt$ $e^{50t}q = \frac{1}{100}e^{50t} + c$ $q(t) = \frac{1}{100} + ce^{-50t}$ $0 = \frac{1}{100} + c$ $-\frac{1}{100} = c$ $\boxed{\begin{array}{c} q(t) = \frac{1}{100} - \frac{1}{100}e^{-50t} \\ i(t) = \frac{1}{2}e^{-50t} \end{array}}$