UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-114-1-V-2-00-2017_sM

CURSO:	**Matemática Intermedia 3**
SEMESTRE:	**Segundo**
CÓDIGO DEL CURSO:	**114**
TIPO DE EXAMEN:	**Primer Examen Parcial**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Albert Miguel Chuy**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Albert Miguel Chuy**
REVISÓ EL EXAMEN:	**Ing. Francisco García**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

Primer Examen Parcial

TEMA 1. (15 pts.):

Clasifique las siguientes ecuaciones diferenciales.

		Orden	**Grado**	**Lineal (Si o No)**
a.	$\dfrac{d^2Y}{dX^2} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{dY}{dX}\right)^2}$			
b.	$2X^2Y^{(6)} + 3Y = \tan x$			
c.	$(1 - X)\,Y'' - 4XY' + 5Y = \cos X$			
d.	$2Y \cdot Y'' + X(Y')^4 = \sin x$			
e.	$\left(Y^2 - 1\right) dx + xdy = 0$			

TEMA 2. (10 pts.):

Verifique si la solución particular $\boldsymbol{y = 9\pi cosx + 7sinx + 4x - 5xcosx}$ es una solución de la Ecuación Diferencial $\boldsymbol{y'' + y = 4x + 10sinx}$.

TEMA 3. (15 pts. c/u):

Resuelva, indicando el **método utilizado** y dejando constancia de **todo** su procedimiento.

1. $\boldsymbol{(5x + 4y)dx + (4x - 8y^3)dy = 0}$
2. $\boldsymbol{(y^2 + yx)dx - x^2dy = 0}$
3. $\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy + 3x - y - 3}{xy - 2x + 4y - 8}}$
4. $\boldsymbol{x\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{1}{y^2}}$
5. Resuelva el problema con valores iniciales de tal forma que la solución sea continua. $\boldsymbol{y' + y = f(x)}$ sujeto a $\boldsymbol{y(0) = 1}$.

   donde:$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ -1, & x > 1 \end{cases}}$

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

TEMA 1. (15 pts.):
Clasifique las siguientes ecuaciones diferenciales.

		Orden	Grado	Lineal (Si o No)
a.	$\dfrac{d^2Y}{dX^2} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{dY}{dX}\right)^2}$	*2*	*2*	***No***
b.	$2X^2Y^{(6)} + 3Y = \tan x$	***6***	***1***	***Si***
c.	$(1 - X)\,Y'' - 4XY' + 5Y = \cos X$	*2*	***1***	***Si***
d.	$2Y \cdot Y'' + X(Y')^4 = \sin x$	*2*	***1***	***No***
e.	$\left(Y^2 - 1\right) dx + xdy = 0$	***1***	***1***	***No***

TEMA 2. (10 pts.):
Verifique si la solución particular $\boldsymbol{y = 9\pi cosx + 7sinx + 4x - 5xcosx}$ es una solución de la Ecuación Diferencial $\boldsymbol{y'' + y = 4x + 10sinx}$.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se toma la solución particular dada, y se deriva la cantidad de veces según la ecuación diferencial, en este caso, se tiene que encontra la segunda derivada.	$y' = -9\pi \sin x + 7\cos x + 4 - 5\cos x$ $+5x \sin x$
2.	Se simplifica $\boldsymbol{y'}$.	$y' = -9\pi \sin x + 2\cos x + 5x\sin x + 4$
3.	Se encuentra $\boldsymbol{y''}$ y se simplifica.	$y'' = -9\pi \cos x + 3\sin x + 5x\cos x$
4.	Se sustituye la solución particular $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{y''}$ en la ecuación diferencial.	$-9\pi \cos x + 3\sin x + 5x\cos x$ $+9\pi \cos x + 7\sin x + 4x - 5x\cos x$ $= 4x + 10\sin x$

5.	Se simplifica todo el miembro izquierdo de la ecuación, dando como resultado. Como se puede observar, los dos miembros de la ecuación son iguales, entonces se dice que la solución particular si es solución de la E.D.	$4x + 10\sin x = 4x + 10\sin x$

Respuesta: **La solución particular $\boldsymbol{y = 9\pi cosx + 7sinx + 4x - 5xcosx}$, si es solución de la Ecuación Diferencial.**

TEMA 3. (15 pts. c/u):

Resuelva, indicando el **método utilizado** y dejando constancia de **todo** su procedimiento.

1. $\boldsymbol{(5x + 4y)dx + (4x - 8y^3)dy = 0}$:

No.	**Explicación**	**Operatoria**
1.	Se verifica la ecuación diferencial, y se logra distinguir que pueda ser una ED. Exacta. Se hacen las pruebas respectivas. Se encuentra $M_{(x,y)}$ y $N_{(x,y)}$	$M_{(x,y)} = 5x + 4y$ $N_{(x,y)} = 4x - 8y^3$
2.	Se encuentra $\dfrac{\partial M}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ para verificar si son iguales.	$\dfrac{\partial M}{\partial y} = 4 = \dfrac{\partial N}{\partial x}$
3.	Como $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, se procede con el procedimiento de ED. Exactas.	$\dfrac{df}{dy} = 4x - 8y^3$
4.	Se integra la función.	$f_{(x,y)} = 4xy - 2y^4 + h(x)$
5.	Se deriva la función $f_{(x,y)}$ con respecto a x.	$f'_{(x,y)} = 4y + h'(x)$
6.	La función anterior, se iguala a $M_{(x,y)}$, y con eso se encuentra el valor de $h'(x)$.	$4y + h'(x) = 5x + 4y$ $h'(x) = 5x$
7.	Se integra $h'(x)$.	$h(x) = \dfrac{5}{2}x^2$

8.	Con esto, se obtiene la solución de la ecuación.	$4xy - 2y^4 + \frac{5}{2}x^2 = C$

Respuesta: $\boldsymbol{4xy - 2y^4 + \frac{5}{2}x^2 = C}$

2. $\boldsymbol{(y^2 + yx)dx - x^2dy = 0}$

No.	**Explicación**	**Operatoria**
1.	Se hace la prueba para ver si es una ED. Homogénea	$M(tx, ty) = t^2y^2 + t^2yx$ $N(tx, ty) = -t^2x^2$
2.	Se factoriza t^2 en ambas funciones, y se comprueba que es una E.D. Homogénea de grado 2.	$M(tx, ty) = t^2(y^2 + yx)$ $N(tx, ty) = t^2(-x^2)$
3.	Se hace la sustitución correspondiente.	$y = ux$ $dy = xdu + udx$
4.	Se sustituye en la ecuación original.	$(u^2x^2 + ux^2)dx - x^2(xdu + udx) = 0$
5.	Se simplifica la ecuación.	$u^2x^2dx + ux^2dx - x^3du - ux^2dx = 0$ $u^2x^2dx - x^3du = 0$
6.	Se despejan, para poder aplicar el método de variables separables.	$\frac{dx}{x} = \frac{du}{u^2}$
7.	Se integra cada uno de los miembros de la ecuación.	$\ln x = -\frac{1}{u} + C$ $u \ln x = -1 + uC$

8.	Cambiamos de variable, $u = y/x$.	$\frac{y}{x} lnx = -1 + \frac{y}{x}C$ $x + y\ln x = yC$

Respuesta: $\boldsymbol{x + y\ln x = yC}$

3. $\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy + 3x - y - 3}{xy - 2x + 4y - 8}}$

No.	Explicación	Operatoria
1.	El método a utiliar será el de variables separables, pero primero se tiene que manipular la ecuación.	$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x-1)+3(x-1)}{y(x+4)-2(x+4)}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{(y+3)(x-1)}{(y-2)(x+4)}$ $\frac{(y-2)}{(y+3)}dy = \frac{(x-1)}{(x+4)}dx$
2.	Ya que las fracciones son impropias, se aplica la división larga para que queden fracciones propias.	$\left(1 - \frac{5}{y+3}\right)dy = \left(1 - \frac{5}{x+4}\right)dx$
3.	Se integra ambos lados de la ecuación	$y - 5\ln\lvert y+3\rvert = x - 5\ln\lvert x+4\rvert + C$
4.	Se simplifica la ecuación.	$y - x = -5\ln\lvert x+4\rvert + 5\ln\lvert y+3\rvert + C$ $y - x = -5\ln\left\lvert\frac{y+3}{x+4}\right\rvert + \ln C$ $y - x = \ln\left\lvert\left(\frac{y+3}{x+4}\right)^{-5} C\right\rvert$

		$$e^{y-x} = \left(\frac{y+3}{x+4}\right)^{-5} C$$
5.	Se despeja la ecuación	$$e^{y} = \left(\frac{x+4}{y+3}\right)^{-5} Ce^{x}$$ $$(y+3)^5 e^y = C(x+4)^5 e^x$$

Respuesta: $\boldsymbol{(y+3)^5 e^y = C(x+4)^5 e^x}$

4. $\boldsymbol{x\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{y^2}}$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Manipulamos la ecuación.	$$x\frac{dy}{dx} + y = y^{-2}$$
2.	Se sabe que $n = -2$, entonces utilizamos la sustitución $u = y^{1-n}$.	$$u = y^{1+2} = y^3$$ $$\frac{du}{dx} = 3y^2 \tfrac{dy}{dx}$$
3.	Se arregla la ecuación diferencial para poder sustituir.	$$xy^2\frac{dy}{dx} + y^3 = 1$$
4.	Se sustituye en la ecuación diferencial.	$$xy^2\left(\frac{1}{3y^2} \cdot \frac{du}{dx}\right) + u = 1$$
5.	Se simplifica y se manipula para dejarla de manera que sea por variables separables.	$$\frac{x}{3} \cdot \frac{du}{dx} + u = 1$$ $$\frac{x}{3} \cdot \frac{du}{dx} = 1 - u$$ $$\frac{du}{1-u} = \frac{3}{x}dx$$

6.	Se integran ambos lados de la ecuación y se simplifica despejando y.	$-\ln\|x-u\| = 3\ln\|x\| + C$ $\ln\|x-u\|^{-1} = \ln\|x\|^3 + \ln C$ $\ln\|x-u\|^{-1} = \ln\|x\|^3 C$
7.	Se aplica e en ambos lados de la ecuación y se simplifica.	$\frac{1}{1-u} = x^3 C$ $\frac{1}{x^3 C} = 1-u$ $u = 1 - \frac{1}{x^3 C}$
8.	Se sustituye $u = y^3$	$y^3 = 1 - \frac{1}{x^3} C$ $y^3 = 1 - x^{-3} C$

Respuesta: $\boldsymbol{y^3 = 1 - x^{-3}C}$

5. Resuelva el problema con valores iniciales de tal forma que la solución sea continua. $\boldsymbol{y' + y = f(x)}$ sujeto a $\boldsymbol{y(0) = 1}$.

$$\text{donde:}\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ -1, & x > 1 \end{cases}}$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se resuelve la E.D. con $f(x) = 1$ en el intervalo $[0, 1]$	$y' + y = 1$
2.	Se puede encontrar el factor integrante	$e^{\int dx} = e^x$ $\frac{d}{dx}[e^x y] = e^x$
3.	Se resuelve la E.D.	$e^x y = e^x + C_1$

4.	Se despeja y.	$y = 1 + C_1e^{-x}$
5.	Se evalúa en la condición inicial $y(0) = 1$.	$1 = 1 + C_1e^0$ $0 = C_1$
6.	Queda como resultado en el intervalo $[0, 1]$.	$y = 1$
7.	Se resuelve la E.D. con $f(x) = -1$ en el intervalo $x > 1$.	$y' + y = -1$
8.	Se utiliza el mismo factor de integración.	$\frac{d}{dx}[e^xy] = -e^x$
9.	Se resuelve la E.D. dando como resultado.	$e^xy = -e^x + C_2$
10.	Se despeja y.	$y = -1 + C_2e^{-x}$
11.	Se puede reescribir la ecuación como:	$y = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ -1 + C_2e^{-x}, & x > 1 \end{cases}$
12.	Según la definición de continuidad en un punto, se puede determinar C_2 así la última función es continua en $x = 1$, esto implica que:	$1 = -1 + C_2e^{-1}$ $2 = C_2e^{-1}$ $2e = C_2$
13.	Se sustituye C_2	$y = -1 + 2e(e^{-x})$

Respuesta: $\boldsymbol{y = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ -1 + 2e(e^{-x}) & x > 1 \end{cases}}$