UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-114-1-V-2-00-2017_sN

CURSO:	**Matemática Intermedia 3**
SEMESTRE:	**Segundo**
CÓDIGO DEL CURSO:	**114**
TIPO DE EXAMEN:	**Primer Parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**Agosto del 2017**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Jorge Castañeda**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Jorge Castañeda**
COORDINADOR:	**Inga. Vera Marroquín**

Agosto del 2017 **Primer Examen Parcial**

Instrucciones: Deje constancia clara y legible de sus procedimientos.

Tema 1: (20 puntos) Dada la ecuación diferencial $(2x+2y)dx+M(x,y)dy=0$

a) Encuentre una función M tal que la ecuación sea exacta.
b) Encuentre su solución.

Tema 2: (40 puntos) Resuelva las ecuaciones diferenciales:

a) $\sqrt{x+y}=y'$
b) $y'=\frac{3x+4y}{4x+3y}$
c) $\frac{Ldi}{dt}+Ri=\begin{cases} E, 0\leq t\leq 1 \\ 0, t>1 \end{cases}, \quad i(0)=i_0$
d) $ydx=(x^2y^2-xy^2)dy$

Tema 3: (20 puntos) Verifique que la ecuación $-2x^2y+y^2=1$ sea una solución de la ecuación diferencial $2xydx+(x^2-y)dy=0$.

Tema 4: (20 puntos) Clasifique las ecuaciones según tipo, linealidad y orden.

a) $3xy'+2xy=0$
b) $3x''y+2x'y=y^2$
c) $\frac{dy}{dt}+\frac{dx}{dt}=0$
d) $\sqrt{\frac{d^3y}{dx^3}}+5\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^5+\frac{e^x dy}{dx}=3xy$

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema 1: Dada la ecuación diferencial $(2x+2y)dx + M(x,y)dy = 0$

a) Encuentre una función M tal que la ecuación sea exacta.
b) Encuentre su solución.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Ya que la ecuación debe ser exacta, debe cumplir que: $$\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x}$$	$\frac{\partial}{\partial y}(2x+2y) = 2$ $\frac{\partial M}{\partial x} = 2$
2.	Si integramos para obtener M	$M = 2x + f(y) + k$
3.	Por simplicidad tomaremos f(y) y k igual a cero.	R// $M = 2x$
4.	Para resolver la ecuación debemos integrar con respecto a x y a y respectivamente.	$\int 2x + 2y\, dx = x^2 + 2xy + h(y) + k$ $\int 2xdy = 2xy + g(x) + k$
5.	De tal manera que la solución es:	R// $c = x^2 + 2xy$

Tema 2: Resuelva las ecuaciones diferenciales:

a) $\sqrt{x+y} = y'$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Utilizaremos una sustitución para realizar la ecuación.	$u = x + y$ $u' = 1 + y'$ $u' - 1 = y'$
2.	Sustituimos en la ecuación diferencial.	$u' - 1 = u^{\frac{1}{2}}$ $\frac{du}{dx} = u^{\frac{1}{2}} + 1$
3.	Realizamos una separación de variables e integramos.	$\int \frac{du}{u^{\frac{1}{2}} + 1} = \int dx$
4.	Para resolver la integral de la izquierda utilizaremos las sustituciones siguientes.	$s = \sqrt{u}$ $2sds = du$
5.	De manera que al sustituir en la integral obtenemos.	$2\int \frac{s}{s+1} ds$

6.	Realizamos fracciones parciales	$= 2\int 1 - \frac{1}{s+1} ds$
7.	Integramos:	$= 2s - 2Ln\lvert s+1\rvert$
8.	Ahora regresamos a las variables originales y obtenemos la respuesta.	R// $2\sqrt{x+y} - 2Ln\left\lvert\sqrt{x+y}+1\right\rvert = x + C$

b) $y' = \frac{3x+4y}{4x+3y}$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Multiplicamos ambos lados de la ecuación por dx.	$(4x+3y)dy - (3x+4y)dx = 0$
2.	Haremos la prueba para saber si la ecuación es homogénea del mismo grado.	$M(tx,ty) = 4(tx) + 3(ty) = t(4x+3y)$ $N(tx,ty) = -t(3x+4y)$ De lo cual podemos decir que la ecuación es homogénea del mismo grado.
3.	Hacemos la sustitución: $y = ux$ $dy = udx + xdu$	$(4x+3ux)(udx+xdu) = (3x+4ux)dx$
4.	Al reducir la expresión anterior y agrupar al factorizar los diferenciales.	$3xdx(u^2-1) = -x^2(3u+4)du$
5.	Separamos variables e integramos.	$-\int \frac{3}{x}dx = \int \frac{3u+4}{u^2-1}du$
6.	Para resolverla integral de la derecha realizamos fracciones parciales y al resolver la integral obtenemos:	$-3Ln\lvert x\rvert = \frac{3}{2}Ln\lvert u^2-1\rvert - 2Ln\lvert u+1\rvert$ $+ 2Ln\lvert u-1\rvert + C$
7.	Regresamos a la variable original y	R// $-3Ln\lvert x\rvert = \frac{3}{2}Ln\left\lvert\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1\right\rvert - 2Ln\left\lvert\left(\frac{y}{x}\right)+1\right\rvert +$ $2Ln\left\lvert\left(\frac{y}{x}\right)-1\right\rvert + C$

c) $\frac{Ldi}{dt} + Ri = \begin{cases} E, 0 \leq t \leq 1 \\ 0, t > 1 \end{cases}$, $i(0) = i_0$

1.	Para el intervalo $0 \leq t \leq 1$ ponemos la EDO en forma estándar	$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$ Cuyo factor integrante es: $e^{\frac{R}{L}t}$
2.	Multiplicamos la ecuación por el factor integrante:	$\frac{d}{dt}\left[e^{\frac{R}{L}t}i\right] = \frac{E}{L}e^{\frac{R}{L}t}$
3.	Multiplicamos ambos lados de la ecuación por dt e integramos, obteniendo el resultado:	$e^{\frac{R}{L}t} * i = \frac{E}{R}e^{\frac{R}{L}t} + C$
4.	Dividimos ambos lados de la ecuación por:	$i = \frac{E}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t}$

	$e^{\frac{R}{L}t}$	
5.	Aplicamos las condiciones iniciales: $$i(0) = i_0$$	$$i_0 = \frac{E}{R} + C$$ Despejamos C: $$C = i_0 - \frac{E}{R}$$
6.	De tal manera que para el intervalo $0 \leq t \leq 1$ tenemos la solución:	$$i(t) = \frac{E}{R} + \left(i_0 - \frac{E}{R}\right) e^{-\frac{R}{L}t}$$
7.	Para el siguiente intervalo tenemos que resolver:	$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0$$
8.	Cuyo factor integrante es el mismo que el anterior, obteniendo al multiplicar por toda la ecuación:	$$\frac{d}{dt}\left[e^{\frac{R}{L}t} * i\right] = 0$$ $$\int d\left[e^{\frac{R}{L}t} * i\right] = \int 0dt$$
9.	Al multiplicar por dt en ambos lados de la ecuación y realizar la integral:	$$i = ke^{-\frac{R}{L}t}$$ Donde k es una constante.
10.	Por el fenómeno físico que representa la ecuación diferencial, el cual es un circuito RL, suponemos que i debe ser continua en todo su dominio, lo cual implica que:	$$\lim_{t \to 1^-} i = \lim_{t \to 1^+} i$$
11.	Al aplicar estos límites obtenemos:	$$\frac{E}{R} + \left(i_0 - \frac{E}{R}\right) e^{-\frac{R}{L}} = ke^{-\frac{R}{L}}$$
12.	Despejamos para obtener k de la ecuación anterior y obtenemos:	$$k = \frac{E}{R} e^{\frac{R}{L}t} + i_0 - \frac{E}{R}$$
13.	Habiendo encontrado ambas soluciones tenemos la función completa:	R// $i(t) = \begin{cases} \frac{E}{R} + \left(i_0 - \frac{E}{R}\right) e^{-\frac{R}{L}t}, & 0 \leq t \leq 1 \\ \left[\frac{E}{R} e^{\frac{R}{L}t} + i_0 - \frac{E}{R}\right] e^{-\frac{R}{L}t}, & t \geq 0 \end{cases}$

d) $ydx = (x^2y^2 - xy^2)dy$

1.	Primero vamos a factorizar el lado derecho de la ecuación.	$$ydx = y^2(x^2 - x)dy$$
2.	Dividimos ambos lados de la ecuación por: $$\frac{1}{y(x)(x-1)}$$ E integramos de ambos lados de la ecuación	$$\int \frac{1}{(x-1)x} dx = \int y\, dy$$
3.	Del lado izquierdo aplicamos fracciones parciales.	$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$$ $$1 = A(x-1) + Bx$$ De lo cual obtenemos el sistema: $$A + B = 0$$ $$A = -1$$ Entonces:

		$A=-1\ y\ B=1$
4.	De manera que el lado izquierda de la ecuación nos queda:	$\int \frac{-1}{x}+\frac{1}{x-1}dx=\int y\,dy$
5.	Por último realizamos las integrales.	R// $Ln\vert x-1\vert - Ln\vert x\vert = \frac{y^2}{2}+C$

Tema 3: Verifique que la ecuación $-2x^2y+y^2=1$ sea una solución de la ecuación diferencial $2xydx+(x^2-y)dy=0$.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Vamos a derivar nuestra supuesta solución con respecto de x	$-2x^2\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}-4xy=0$
2.	Factorizamos los dy/dx obteniendo	$(-2x^2+2y)\frac{dy}{dx}-4xy=0$
3.	Multiplicamos ambos lados de la ecuación por dx:	$-2(x^2-y)dy-4xydx=0$
4.	Multiplicamos ambos lados de la ecuación por (-1)	$2xydx+2(x^2-y)dy=0$ Que es la ecuación diferencial.
5.	R// Desde la solución podemos ir a la ecuación diferencial, verificando por tanto que: $-2x^2y+y^2=1$ es una solución de $2xydx+(x^2-y)dy=0$.	

Tema 4: Clasifique las ecuaciones según tipo, linealidad y orden.

Ecuación	Tipo	Lineal	Orden
$3x\frac{dy}{dx}+2xy=2xy^2$	**EDO**	**NO**	**1**
$3\frac{d^2x}{dy^2}y+2\frac{dx}{dy}*y=y^2$	**EDO**	**SI**	**2**

$\frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt}$	**EDO**	**SI**	**1**
$\sqrt{\frac{d^3y}{dx^3}} + 5\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^5 + e^x \frac{dy}{dx} = 3xy$	**EDO**	**NO**	**3**