UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-114-1-V-4-00-2017

CURSO:	**Matemática Intermedia 3**
SEMESTRE:	**Primero**
CÓDIGO DEL CURSO:	**114**
TIPO DE EXAMEN:	**FINAL**
FECHA DE EXAMEN:	**10 de Mayo de 2017**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Sedwin Ramos**
REVISÓ EL EXAMEN:	**Ing. Mario López**

Tema 1

Las variaciones instantáneas de una población muy grande respecto al tiempo están descritas por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP)$$

Demostrar que la función de la población con respecto al tiempo P(t), solución de la ecuación diferencial [1], esta dada por :

$$P = \frac{aP_0}{bP_0 + (a - bP_0)e^{-at}}$$

N°	Explicación	Operatorio
1	Se plantea la ecuación diferencial para analizar su método de resolución	$\frac{dP}{dt} = P(a - bP)$
2	Se resuelve la ecuación diferencial por medio de variables separables	$\frac{dP}{P(a - bP)} = dt$
3	Resolviendo por fracciones parciales	$\frac{1}{P(a - bP)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{(a - bP)}$ $\frac{1}{P(a - bP)} = \frac{A(a - bP) + BP}{P(a - bP)}$ $1 = Aa - AbP + BP$ $1 = Aa + (B - Ab)P$ Se tiene que: $1 = Aa$ $A = \frac{1}{a}$ $0 = (B - Ab)P$ $B = \frac{b}{a}$
4	Integrando respecto a "P" el lado izquierdo de la ecuación	$\int \frac{\frac{1}{a}}{P} + \frac{\frac{b}{a}}{(a - bP)}\, dP$ $= \frac{1}{a} ln\lvert P\rvert + \frac{b}{a}\int \frac{1}{(a - bP)} dP$ $Si \quad u = a - bP$

		$dP = -\frac{1}{b}du$ Entonces: $= \frac{1}{a}ln\lvert P\rvert + \left(\frac{b}{a}\right)\left(-\frac{1}{b}\int \frac{1}{u}du\right)$ $= \frac{1}{a}ln\lvert P\rvert - \frac{1}{a}ln\lvert a - bP\rvert$
5	Integrando lado derecho de la ecuación y simplificando	$\frac{dP}{P(a-bP)} = dt$ $\frac{1}{a}ln\lvert P\rvert - \frac{1}{a}ln\lvert a - bP\rvert = t + C_1$ $\frac{1}{a}(ln\lvert P\rvert - ln\lvert a - bP\rvert) = t + C_1$ $ln\left\lvert \frac{P}{a-bP} \right\rvert = at + C_2$ $\frac{P}{a-bP} = C_3e^{at}$ $P = \frac{aC_3e^{at}}{bC_3e^{at}+1} * \frac{\frac{1}{e^{at}}}{\frac{1}{e^{at}}}$ $P = \frac{aC_3}{bC_3 + e^{-at}}$
6	Si en t = 0 entonces P = Po	$P_0 = \frac{aC_3}{bC_3 + e^{-at}}$ Despejando C_3 $C_3 = \frac{P_0}{a - P_0b}$ Solución Particular $P = \frac{aC_3}{bC_3 + e^{-at}} * \frac{\frac{1}{C_3}}{\frac{1}{C_3}}$ $P = \frac{a}{b + \frac{e^{-at}}{C_3}} = \frac{a}{b + \frac{(a-bP_0)}{P_0}e^{-at}}$ $P = \frac{aP_0}{bP_0 + (a - bP_0)e^{-at}}$

R//

$$P = \frac{aP_0}{bP_0 + (a - bP_0)e^{-at}}$$

Tema 2

Un circuito serie LRC; con L=1/2H, R=10ohm, C=1/100F; se alimenta con una fuerza electromotriz de 150 Voltios. Si la carga en tiempo cero es de1 coulomb y la corriente en tiempo cero es de cero amperios, determinar:

A. La función de la carga respecto al tiempo q(t)
B. La carga en el capacitor después de un tiempo muy grande
C. La función de la corriente respecto al tiempo q(t)
D. La corriente después de un tiempo muy grande

N°	Explicación	Operatorio
1	Se plantea la ecuación diferencial para la ley de circuitos RLC	$L\frac{d^2y}{dt^2}+R\frac{dy}{dx}+\frac{1}{C}y=E(t)$
2	Reemplazando valores	$\left(\frac{1}{2}\right)\frac{d^2y}{dt^2}+(10)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{1}{0.01}\right)y=(150)$ Multiplicamos por 2 toda la ecuación, se tiene $\frac{d^2y}{dt^2}+20\frac{dy}{dx}+200y=300$
3	Se resuelve la ecuación homogénea asociada	$m^2+20m+200=0$ $m^2+20m+100=-100$ $(m+10)^2=-100$ $m=-10\pm 10i$ $q_c=C_1e^{-10t}\cos 10t+C_2e^{-10t}\sin 10t$
4	Se resuelve para encontrar la ecuación	$q(t)_p=A \quad q'(t)_p=\ 0 \quad q''(t)_p=0$ $200A=300$ $A=q_p=\frac{3}{2}$ Se sabe que: $q(t)=q_c+q_p$ $y=(C_1e^{-10t}\cos 10t+C_2e^{-10t}\sin 10t)+3/2$
5	Aplicando las condiciones iniciales	$q(0)=0 \leftrightarrow \quad C_1+\frac{3}{2}=0 \leftrightarrow C_1=-\frac{1}{2}$ $q'(0)=1 \leftrightarrow \quad C_2+\ C_1=0 \leftrightarrow C_2=-\frac{1}{2}$
6	La solución particular queda	$q(t)=-\left(\frac{1}{2}\right)e^{-10t}(\cos 10t+sen10t)+3/2$

7	Se calcula el límite de la función cuando t tiende al infinito	$\lim_{t\to\infty} q(t) == -\left(\frac{1}{2}\right) e^{-10\infty} (\cos 10t + sen10t) + 3/2$ $= 0 - 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\ Coulombs$
8	Derivando q(t)	$i(t) = 10 \sin 10t\ e^{-10t}$
9	Calculando el limite	$\lim_{t\to\infty} i(t) = 10 \sin 10t\ e^{-10\infty} = 0$ Amperios

$$a)\ q(t) = -\left(\frac{1}{2}\right) e^{-10t} (\cos 10t + sen10t) + 3/2$$

$b)\ \lim_{t\to\infty} q(t) = 3/2$ Coulombs

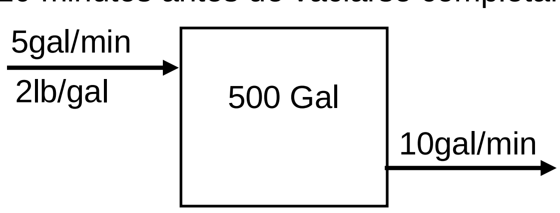
$$c)\ i(t) = 10\, e^{-10t} \sin 10t$$

$d)\ \lim_{t\to\infty} i(t) = 0$ Amperios

TEMA 3

Un tanque muy grande contiene inicialmente 500 galones de agua pura. Se inicia a bombear a dicho tanque salmuera a razón de 5 galones por minuto con una concentración de 2 libras de sal por galón. Simultáneamente, se drena del tanque, la solución bien mezclada, a razón de 10 galones por minuto. Si A determina la cantidad de sal en el tanque en el tiempo t, determinar la cantidad de sal en el tanque 10 minutos antes de vaciarse completamente.

ESQUEMA:



No.	Explicación	Operatorio
1.	Se plantea la ecuación diferencial y se simplifica	$\frac{dA}{dt} = R_{ent} - R_{sal}$ $\frac{dA}{dt} = Q_e C_e - Q_s C_s$ $\frac{dA}{dt} = (5)(2) - (10)\left(\frac{A}{500+5t-10t}\right)$ $\frac{dA}{dt} = 10 - \frac{2A}{100-t}$ $10 = \frac{dA}{dt} + \frac{2A}{100-t}$

2.	Resolviendo para obtener el factor de integración	$M(t) = e^{\int \frac{2}{100-t}dt}$ $Si \quad u = 100 - t$ $du = -dt$ Entonces: $= -2\int \frac{1}{u}du =$ -2ln$\lvert u \rvert$ = ln$\lvert (100-t)^{-2} \rvert$ $M(t) = e^{\ln\lvert(100-t)^{-2}\rvert}$ $M(t) = (100-t)^{-2}$
3.	Sustituyendo y operando	$(100-t)^{-2}A = \int 10(100-t)^{-2}dt$ $Si \quad u = 100 - t$ $du = -dt$ Entonces: $= -10\int u^{-2}du \ = \ \frac{10}{u} + C_1$ $\frac{A}{(100-t)^2} = \frac{10}{(100-t)} + C_1$ $A = 10(100-t) + C_1(100-t)^2$
4.	Aplicando condiciones iniciales	$A(0) = 0$ $A = 10(100-0) + C_1(100-0)^2$ $C_1 = -\frac{1}{10}$
5.	Por tanto la ecuación queda	$A(t) = 10(100-t) - \frac{1}{10}(100-t)^2$
6.	Tiempo para vaciarse	$Q_{neto\ de\ salida} = 5\ \frac{gal}{min}$ $Q = \frac{v}{t}$ $t = \frac{v}{Q} = \frac{500\ gal}{5\frac{gal}{min}}$ = 100min
7.	Cantidad de sal en el tanque, 10 minutos antes de vaciarse	$A(90) = 10(100-90) - \frac{1}{10}(100-90)^2$ $A(90) = 90\ lbs\ de\ sal$

R//

$$A(90) = 90\ lbs\ de\ sal$$

Tema 4

Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$2\frac{dx}{dt} - 5x + \frac{dy}{dx} = e^t$$

$$\frac{dx}{dt} - x + \frac{dy}{dx} = 5e^t$$

No.	Explicación	Operatorio
1.	Se plantea la ecuación diferencial utilizando el operador diferencial D	$2Dx - 5x + Dy = e^t$ $Dx - x + Dy = 5e^t$
2.	Resolviendo el sistema, eliminando "x"	$(2D-5)x + Dy = e^t$ $(D-1)x + Dy = 5e^t$ $(D-1) * (2D-5)x + Dy = (D-1)e^t$ $-(2D-5) * (D-1)x + Dy = (2D-5)5e^t$ $D(D-1)y - D(2D-5)y = (D-1)e^t - (2D-5)5e^t$ $(D^2 - 4D)y = -15e^t$
3.	Determinando Y_c	$(D^2 - 4D)y = 0$ $m^2 - 4m = 0$ $m_1 = 0$ $m_2 = 4$ $y_c = C_1 + C_2e^{4t}$
4.	Determinando Y_p	$Y_p = Ae^t$ $Y'_p = Ae^t$ $Y"_p = Ae^t$ $Ae^t - 4Ae^t = -15e^t$ $A = 5$ $Y_p = 5e^t$ Solución para "y" $y = C_1 + C_2e^{4t} + 5e^t$

5.	Resolviendo el sistema, eliminando "y"	$(2D-5)x+Dy=e^t$ $-((D-1)x+Dy=5e^t)$ $(2D-5)x$-$(D-1)x$=e^t-5e^t $(D-4)x=-4e^t$
6.	Determinando X_c	$(D-4)X=0$ $m-4=0$ $m=4$ $y_c=C_3e^{4t}$
7.	Determinando X_p	$X_p=Ae^t$ $X'_p=Ae^t$ $X"_p=Ae^t$ $Ae^t-4Ae^t=-4e^t$ $A=\frac{4}{3}$ $Y_p=\frac{4}{3}e^t$ Solución para "X" $X=C_3e^{4t}+\frac{4}{3}e^t$
8.	Relación de constantes	$\frac{dx}{dt}=4C_3e^{4t}+\frac{4}{3}e^t$ $\frac{dy}{dt}=4C_2e^{4t}+5e^t$ Se tiene que: $4C_3e^{4t}+\frac{4}{3}e^t-4C_3e^{4t}-\frac{4}{3}e^t$+$4C_2e^{4t}+5e^t=5e^t$ $(3C_3+4C_2)e^{4t}=0$ $C_3=-\frac{4}{3}C_2$

R//

$$x=-\frac{4}{3}C_2e^{4t}+\frac{4}{3}e^t$$

$$y=C_{1+}C_2e^{4t}+5e^t$$