CLAVE-114-2-M-1-00-2015

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATMÁTICA

CURSO:	Matemática Intermedia 3
JORNADA:	Matutina
SEMESTRE:	1er. Semestre
AÑO:	2015
TIPO DE EXAMEN:	2do. Parcial
NOMBRE DEL AUXILIAR:	Selvyin Solórzano
NOMBRE DE LA PERSONA QUE REVISÓ EL EXAMEN:	Inga. Ericka Cano

Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemática
Matemática Intermedia 3

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL

Instrucciones: Trabaje de forma clara y ordenada dejando constancia de su procedimiento. No se permite el uso de calculadora programable ni de dispositivos electrónicos. El celular debe permanecer apagado durante todo el examen.

TEMA NO. 1 (25 PUNTOS)

Se tiene un tanque de 10 pies de largo y la cara transversal tiene la forma de un trapecio isóceles con 2 pies en la base inferior sobre el eje horizontal, 4 pies en la base superior y 4 pie de altura, inicialmente se encontraba lleno. En el fondo del tanque se perforó un agujero circular con radio de 2 pulgadas. ¿En cuánto tiempo se vacía totalmente el tanque?

TEMA NO. 2 (20 PUNTOS)

Inicialmente había 100 miligramos de una sustancia radiactiva. Al cabo de 6 horas, la cantidad disminuyo un 3%. Si la razón de desintegración en cualquier momento, es proporcional a la cantidad de la sustancia presente.
Calcule:
a) La cantidad que queda después de 2 horas.
b) El período de vida media de la sustancia radiactiva.

TEMA NO. 3 (25 PUNTOS)

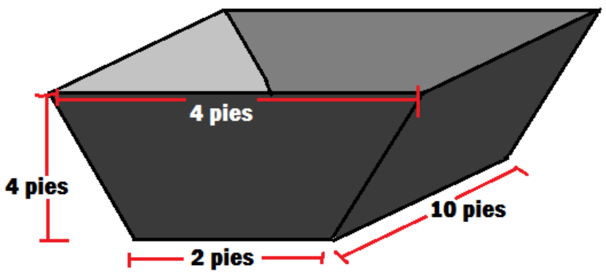
El cuerpo de una víctima aparentemente de homicidio fue descubierto en horas de la mañana. Para resolver el crimen, se debe determinar cuándo se cometió dicho homicidio. Un forense llega al medio día y determina que la temperatura del cuerpo era de 80°F. Y que la temperatura de la víctima al momento del fallecimiento era de 98.6°F. Determine la hora en que se cometió el crimen.

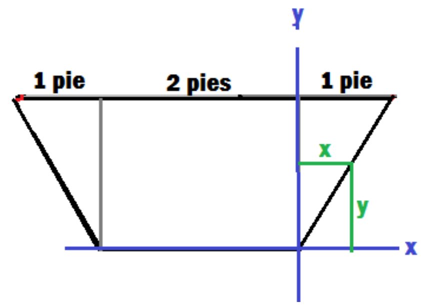
TEMA NO. 4 (30 PUNTOS)

Un tanque de 150 galones se llena inicialmente con alcohol. Al tanque fluye agua pura a razón de 15 galones / minuto. La mezcla sale del tanque a la misma tasa y pasa a otro tanque de 150 galones que está lleno con agua pura. La mezcla resultante sale del segundo tanque a razón de 15 galones / minuto.
Encuentre:
a) La cantidad de alcohol en el primer tanque en cualquier instante t.
b) La cantidad de alcohol en el segundo tanque en cualquier instante t.
c) Determine la cantidad de alcohol que llega a tener el segundo tanque después de media hora.

TEMA NO. 1 (25 PUNTOS)

Datos del problema:





Semejanza de triángulos:

$$\frac{4}{1} = \frac{y}{x} \quad \rightarrow \quad x = \frac{y}{4}$$

$$r = 2pulg * \frac{1\, pie}{12\, pulg} = \frac{1}{6} pie$$

$$a = \pi\, r^2 = \pi \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{\pi}{36}$$

Área transversal:

$A(y) = 10\,(2 + 2x)$
$A(y) = 20 + 20x$
$A(y) = 20 + 20(\frac{y}{4})$
$\boldsymbol{A(y) = 20 + 5y}$

Teniendo los todos los datos se deben de reemplazar en la ecuación diferencial y se comienza a resolver por variables separables:

$$A(y)\frac{dy}{dt} = -a\sqrt{2gy}$$

$$(20 + 5y)\frac{dy}{dt} = -\frac{\pi}{36}\sqrt{2 * (32) * y}$$

$$(20 + 5y)\frac{dy}{dt} = -\frac{\pi}{36} * 8\sqrt{y}$$

$$\frac{(20 + 5y)}{\sqrt{y}} dy = -\frac{2\pi}{9} dt$$

$$\int (20y^{-\frac{1}{2}} + 5y^{\frac{1}{2}})\, dy = -\frac{2\pi}{9}\int dt$$

$$20(2)y^{\frac{1}{2}} + 5\left(\frac{2}{3}\right)y^{\frac{3}{2}} = -\frac{2\pi}{9}t + C$$

$$\boldsymbol{40y^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{10}{3}\right)y^{\frac{3}{2}} = -\frac{2\pi}{9}t + C}$$

Aplicando condiciones iniciales para encontrar C:

$$y(t=0)=4$$

$$40(4)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{10}{3}\right)(4)^{\frac{3}{2}}=-\frac{2\pi}{9}(0)+C$$

$$C=\frac{320}{3}\approx 106.66$$

$$\boldsymbol{40y^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{10}{3}\right)y^{\frac{3}{2}}=-\frac{2\pi}{9}t+\frac{320}{3}}$$

Ahora se determina el tiempo en el que el tanque se vaciara:

$$y(t=?)=0$$

$$40(0)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{10}{3}\right)(0)^{\frac{3}{2}}=-\frac{2\pi}{9}t+\frac{320}{3}$$

$$\frac{2\pi}{9}t=\frac{320}{3}$$

$$t=\frac{320}{3}*\frac{9}{2\pi}$$

$$\boldsymbol{t=152.78}$$

En conclusión, el tanque se vaciará en 152.78 segundos.

TEMA NO. 2 (20 PUNTOS)

Definición de variables y datos del problema:

A = cantidad de la sustancia (mg)

t = tiempo (horas)

A (mg)	100	97	¿?	50
t (horas)	0	6	2	t

Se resuelve la ecuación diferencial por variables separables:

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

$$\int \frac{dA}{A} = \int k\, dt$$

$$Ln\,(A) = kt + C$$

$$\boldsymbol{A(t) = C\, e^{kt}}$$

Sustituyendo la primera condición:

$$A(0) = 100 = C\, e^{k(0)}$$

$$C = 100$$

$$\boldsymbol{A(t) = 100\, e^{kt}}$$

Sustituyendo la segunda condición:

$$A(6) = 97 = 100\, e^{k(6)}$$

$$\frac{97}{100} = e^{6k}$$

$$Ln\left(\frac{97}{100}\right) = 6k$$

$$\frac{Ln\left(\frac{97}{100}\right)}{6} = k$$

$$\boldsymbol{A(t) = 100\, e^{\frac{Ln\left(\frac{97}{100}\right)}{6}t}}$$

Teniendo la ecuación completa es posible determinar la cantidad de sustancia después de 2 horas:

$$A(2) = 100\, e^{\frac{Ln\left(\frac{97}{100}\right)}{6}(2)}$$

$$A(2) = 98.98\, mg$$

Después de 2 horas habrá 98.98mg de sustancia.

La vida media se puede determinar despejando para t, sabiendo que A(t)=50 :

$$A(t) = 50 = 100\, e^{\frac{Ln\left(\frac{97}{100}\right)}{6}t}$$

$$\frac{1}{2} = \ e^{\frac{Ln\left(\frac{97}{100}\right)}{6}t}$$

$$Ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{Ln\left(\frac{97}{100}\right)}{6}t$$

$$\frac{Ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{Ln\left(\frac{97}{100}\right)}{6}} = t$$

$$t = 136.5\ horas$$

La vida media de la sustancia es de 136.5 horas.

TEMA NO. 3 (25 PUNTOS)

Definición de variables y datos del problema:

T= temperatura del cuerpo (°F)

t = tiempo (horas)

Tm = temperatura ambiente = 70°F

X = hora a la que se cometió el crimen

A (mg)	80	75	98.6
t (horas)	12:00	13:00	X

La ecuación diferencial de la ley de enfriamiento de Newton se resuelve por variables separables:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - Tm)$$

$$\int \frac{dT}{(T - Tm)} = \int k\ dt$$

$$Ln(T - Tm) = kt + C$$

$$e^{Ln(T-Tm)} = e^{kt+C}$$

$$(T - Tm) = Ce^{kt}$$

$$T(t) = Ce^{kt} + Tm$$

$$\boldsymbol{T(t) = Ce^{kt} + 70}$$

Con la primera condición se determinará el valor de C en términos de k:

$$T(12) = 80 = Ce^{k(12)} + 70$$

$$10 = Ce^{k(12)}$$

$$10e^{-12k} = C$$

$$\boldsymbol{T(t) = (10e^{-12k})e^{kt} + 70}$$

Con la segunda condición se determinara el valor de k:

$$T(13) = 75 = (10e^{-12k})e^{k(13)} + 70$$

$$5 = 10e^{-12k+13k}$$

$$\frac{1}{2} = e^{k}$$

$$Ln\left(\frac{1}{2}\right) = k$$

$$\boldsymbol{T(t) = (10e^{-12Ln\left(\frac{1}{2}\right)})e^{t\,Ln\left(\frac{1}{2}\right)} + 70}$$

Ahora que ya se cuenta con la función completamente definida es posible determinar el valor de X:

$$T(t = x) = 98.6 = (10e^{-12Ln\left(\frac{1}{2}\right)})e^{x\,Ln\left(\frac{1}{2}\right)} + 70$$

$$28.6 = (10e^{-12Ln\left(\frac{1}{2}\right)})e^{x\,Ln\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\frac{28.6}{10e^{-12Ln\left(\frac{1}{2}\right)}} = e^{x\,Ln\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$Ln\left(\frac{28.6}{10e^{-12Ln\left(\frac{1}{2}\right)}}\right) = Ln\left(e^{x\,Ln\left(\frac{1}{2}\right)}\right)$$

$$Ln\left(\frac{28.6}{10e^{-12Ln\left(\frac{1}{2}\right)}}\right) = x\,Ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{Ln\left(\frac{28.6}{10e^{-12Ln\left(\frac{1}{2}\right)}}\right)}{Ln\left(\frac{1}{2}\right)} = x$$

$$x = 10.48\,horas$$

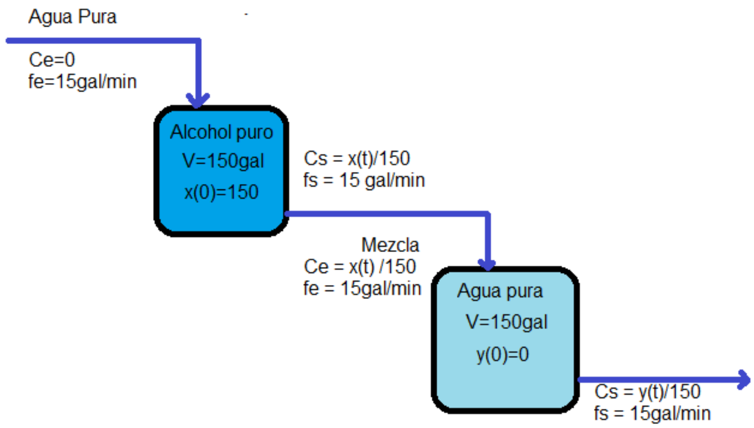
Hay que transformar ese numero a tiempo real. El 10 ya se encuentra bien, pero el 0.48 hay que convertirlo a minutos:

$$\frac{0.48hora}{1} * \frac{60min}{1\,hora} = 28.8min$$

Por lo tanto, el crimen se cometió a las 10:28 A.M.

TEMA NO. 4 (30 PUNTOS)

Diagrama de los datos del problema:



Definición de variables:

x(t) = cantidad de alcohol en el tanque 1 en el tiempo t (gal)
y(t) = cantidad de alcohol en el tanque 2 en el tiempo t (gal)

Ce = concentración de alcohol en el flujo de entrada
Cs = concentración de alcohol en el flujo de salida

fe = flujo de entrada (gal/min)
fs = flujo de salida (gal/min)

Sustituyendo datos en ecuación diferencial para el tanque 1 y resolviendo por variables separables:

$$\frac{dx}{dt} = Entrada - Salida$$
$$\frac{dx}{dt} = Ce * fe - Cs * fs$$
$$\frac{dx}{dt} = (0) * (15) - (x/150) * (15)$$
$$\frac{dx}{dt} = \frac{-x}{10}$$
$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{-dt}{10}$$
$$Ln(x) = -\frac{1}{10}t + C$$
$$e^{Ln(x)} = e^{-\frac{t}{10}+C}$$
$$\boldsymbol{x(t) = Ce^{-\frac{t}{10}}}$$

Se sustituye la condición inicial para determinar el valor de C:

$$x(t = 0) = 150 = Ce^{-\frac{0}{10}}$$
$$C = 150$$
$$\boldsymbol{x(t) = 150e^{-\frac{t}{10}}}$$

Ahora se sustituyen datos en ecuación diferencial para el tanque 2 y se resuelve por método lineal utilizando un factor de integración:

$$\frac{dy}{dt} = Entrada - Salida$$
$$\frac{dy}{dt} = Ce * fe - Cs * fs$$

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{x(t)}{150}\right) * (15) - (y/150) * (15)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{x(t)}{10} - \frac{y}{10}$$

$$\frac{dy}{dt} + \frac{y}{10} = \frac{x(t)}{10}$$

$$\frac{dy}{dt} + \frac{y}{10} = \frac{150e^{-\frac{t}{10}}}{10}$$

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{10}y = 15e^{-\frac{t}{10}}$$

Determinando factor de integración:

$$e^{\int \frac{1}{10}dt} = e^{\frac{t}{10}}$$

La ecuación diferencial se transforma en:

$$e^{\frac{t}{10}} * y = \int e^{\frac{t}{10}} * 15e^{-\frac{t}{10}}\,dt$$

$$e^{\frac{t}{10}} * y = 15\int dt$$

$$e^{\frac{t}{10}} * y = 15t + C$$

$$\boldsymbol{y(t) = 15t\, e^{\frac{-t}{10}} + C}$$

Ahora se determina el valor de C con la condición inicial del tanque 2:

$$y(0) = 0 = 15(0)\, e^{\frac{-(0)}{10}} + C$$

$$C = 0$$

$$\boldsymbol{y(t) = 15t\, e^{\frac{-t}{10}}}$$

Teniendo definida la función del tanque 2 es posible determinar la cantidad de alcohol en el tanque 2 después de 30min.

$$y(30) = 15(30)\, e^{\frac{-(30)}{10}}$$

$$y(30) = 22.4gal$$

En conclusión, los resultados del problema fueron:

a) **Cantidad de alcohol en el primer tanque en cualquier instante:** $\boldsymbol{x(t) = 150e^{-\frac{t}{10}}}$

b) **Cantidad de alcohol en el segundo tanque en cualquier instante:** $\boldsymbol{y(t) = 15t\, e^{\frac{-t}{10}}}$

c) **La cantidad de alcohol que llega a tener el tanque 2 después de media hora es de 22.4 galones de alcohol.**