UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-114-2-M-1-00-2018_SC

CURSO:	**Matemática Intermedia 3**
SEMESTRE:	**Primero**
CÓDIGO DEL CURSO:	**114**
TIPO DE EXAMEN:	**Segundo Parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**Marzo del 2018**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Josué Rabanales**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Josué Rabanales**
COORDINADOR:	**Inga. Vera Marroquín**

Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería
Josué Rabanales

Departamento de Matemática
Matemática Intermedia 3
I Semestre 2018

Marzo del 2018 **Segundo Examen Parcial**

Instrucciones: Deje constancia clara y legible de sus procedimientos.

Tema 1: (20 puntos) Un tanque con forma de pirámide regular truncada de base hexagonal está lleno de un líquido con un coeficiente de fricción y contracción de 0.75. La altura del tanque es de 4 pies, el hexágono de la base tiene lado 2 pues y en la parte más alta tiene 1 pie. En la base el tanque tiene un agujero con un área de 0.1 pies cuadrados. ¿En cuánto tiempo la altura del nivel de agua llegará a 1 pie?

Tema 2: (40 puntos) Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

a. $(x-1)y^2y' - \frac{1}{3}y^3 = e^x; y(0) = 1$
b. $ydx + x(lnx - lny - 1)dy = 0\ ; y(1) = e$

Tema 3: (20 puntos) Una pequeña barra metálica, cuya temperatura inicial era 20 grados centígrados, se deja caer en un gran recipiente que contiene agua hirviendo. ¿Cuánto tiempo le llevará a la barra alcanzar los 90 grados centígrados si se sabe que su temperatura aumentó 2 grados en un segundo? ¿Cuánto le llevará alcanzar los 98 grados centígrados?

Tema 4: (20 puntos) Un tanque de 1000 litros, inicialmente contiene 300 litros de fluido en el cual se han disuelto 30 gramos de sal. La salmuera, que contiene un gramo de sal por litro, se bombea hacia el depósito a una velocidad de 8 L/min; perfectamente mezclada, la solución se bombea se bombea hacia afuera a 5L/min.

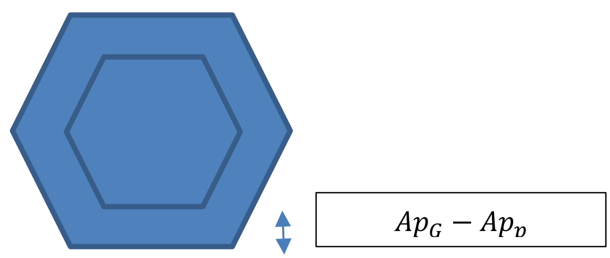
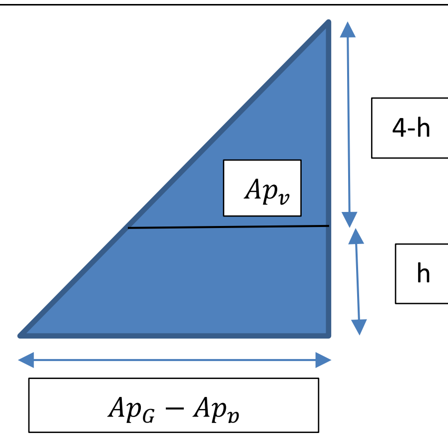
a. Determine una función para determinar la cantidad de sal que hay en el tanque en cualquier momento.
b. Determine en qué momento se llenará el tanque.

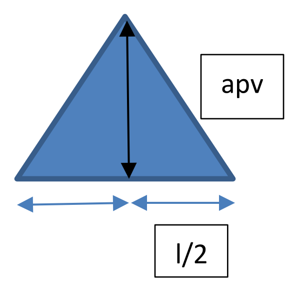
Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería
Josué Rabanales

Departamento de Matemática
Matemática Intermedia 3
I Semestre 2018

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema 1: (20 puntos) Un tanque con forma de pirámide regular truncada de base hexagonal está lleno de un líquido con un coeficiente de fricción y contracción de 0.75. La altura del tanque es de 4 pies, el hexágono de la base tiene lado 2 pues y en la parte más alta tiene 1 pie. En la base el tanque tiene un agujero con un área de 0.1 pies cuadrados. ¿En cuánto tiempo la altura del nivel de agua llegará a 1 pie?

No.	Explicación	Operatoria
1.	Para poder utilizar la ley de Torriccelli necesitamos saber el área para el espejo de agua dada cierta altura. En el caso de un hexágono ésta está dada por la siguiente expresión:	$$A_e = 6l * \frac{A_p}{2}$$ Donde l es el lado del hexágono y Ap es su apotema.
2.	Al tener una vista superior del tanque podemos identificar la siguiente medida importante:	
3.	Si vemos el tanque de lado podemos dibujar el siguiente triángulo:	

4.	De la imagen anterior se puede hacer la siguiente relación de triángulos:	$$\frac{4-h}{Ap_v}=\frac{4}{\sqrt{3}/2}$$
5.	Ahora despejamos la cantidad que sumada al apotema del hexágono superior nos dará la parte variable del apotema con la altura y obtenemos:	$$\frac{\sqrt{3}}{8}(4-h)=\ Ap_v$$
6.	Ahora obtenemos el apotema variable con la altura, en el cual utilizaremos la misma notación que la anterior cantidad solo que ahora utilizaremos la "a" minúscula:	$$ap_v=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{8}(4-h)$$
7.	Ya que una figura regular como el hexágono se puede dibujar utilizando triángulos equiláteros es fácil notar que el lado de tal hexágono se puede obtener de la siguiente forma:	
8.	Esto quiere decir que podemos expresar el Lado del Hexágono de la siguiente forma al utilizar Pitágoras.	$$ap_v=\frac{\sqrt{3}}{2}l$$

9.	Si utilizamos la apotema que habíamos obtenido anteriormente, podemos expresar los lados del hexágono en función de la altura.	$$l_v = \frac{4-h}{4} + 1$$
10.	Si ponemos tanto la apotema como el lado en función de la altura en la fórmula para la altura.	$$A_{esp} = \frac{3\sqrt{3}(8-h)^2}{32}$$
11.	De esta manera ya tenemos todo lo necesario para encontrar la altura en función del tiempo utilizando la ecuación de Torricceli	$$\frac{dh}{dt} = \frac{-A_{esp} * C * \sqrt{2gh}}{3\sqrt{3}(8-h)^2}$$ Hacemos separación de variables para resolver esta ecuación diferencial: $$\int \frac{64 - 16h + h^2}{h^{\frac{1}{2}}} dh = -3.19 \int dt$$ Al realizar ambas integrales utilizando la regla del exponente obtenemos: $$128h^{\frac{1}{2}} - \frac{32}{3}h^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}h^{\frac{5}{2}} = -3.19t + K$$

12.	Encontramos la constante utilizando las condiciones iniciales dadas en el problema. Para t=0 , h=4	$$128\,(4)^{\frac{1}{2}} - \frac{32}{3}\,(4)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}(4)^{\frac{5}{2}} = K$$ Entonces: $$K = 183.46$$ La función es: $$128h^{\frac{1}{2}} - \frac{32}{3}h^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}h^{\frac{5}{2}} = -3.19t + 183.46$$
13.	Ahora podemos encontrar el tiempo en el que la altura es de 1 pie:	$$\frac{\left(128 - \frac{32}{3} + \frac{2}{5} - 183.46\right)}{-3.19} = t$$ $$t = 17.82\ segundos$$ R// Pasan 17.82 segundos hasta que el agua en el tanque tiene un pie de altura.

Tema 2: (40 puntos) Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

a. $(x-1)y^2y' - \frac{1}{3}y^3 = e^x; y(0) = 1$

No.	**Explicación**	**Operatoria**
1.	Esta ecuación se puede resolver por Bernoulli. Primero multiplicamos la forma estándar de la ecuación por $3y^2$	$$3y^2y' - \frac{y^3}{x-1} = \frac{3e^x}{x-1}$$
2.	Ahora hacemos la sustitución: $$u = y^3$$ $$u' = 3y^2y'$$	$$u' - \frac{u}{x-1} = \frac{3e^x}{x-1}$$
3.	La sustitución anterior convirtió la ecuación diferencial anterior en una ecuación lineal. Ahora	$$factor\ integrante: e^{-\int\frac{1}{x-1}dx} = (x-1)^{-1}$$

	obtendremos el factor integrante y lo multiplicaremos por toda la ecuación.	Al multiplicar por toda la ecuación: $$\frac{1}{x-1}u' - \frac{1}{(x-1)^2}u = \frac{3e^x}{(x-1)^2}$$
4.	La ecuación ahora se puede expresar como:	$$\frac{d}{dx}[u(x-1)^{-1}] = \frac{3e^x}{(x-1)^2}$$
5.	Multiplicamos ambos lados de la ecuación por dx e integramos:	$$\int d[u(x-1)^{-1}] = 3\int \frac{e^x}{(x-1)^2}dx$$ Integramos del lado izquierdo, sustituimos “u” en términos de “y” y esa será nuestra respuesta final, ya que la integral a la derecha no puede expresarse en términos de funciones elementales: R// $y^3 * (x-1) + k = 3\int \frac{e^x}{(x-1)^2}dx$

b. $ydx + x(lnx - lny - 1)dy = 0\,; y(1) = e$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Primero hacemos la prueba para ver si es homogénea del mismo grado:	$$M(tx,ty) = ty$$ $$N(tx,ty) = tx\left(Ln\left(\frac{tx}{ty}\right) - 1\right) = tx(Ln(x) - Ln(y) - 1)$$ Por lo cual concluimos que ambas son homogéneas de grado 1.
2.	Podemos hacer la sustitución: $$y = ux$$ $$dy = udx + xdu$$ A fin de obtener una separación de variables:	$$ux\,dx + x(Ln(x) - Ln(ux) - 1)(ydx + xdu) = 0$$ Simplificamos utilizando las propiedades de logaritmos: $$uxdx + x\left(Ln\left(\frac{1}{u}\right) - 1\right)(udx + xdu) = 0$$ Hacemos todas las multiplicaciones posibles para obtener términos individuales: $$uxdx + xuLn\left(\frac{1}{u}\right)dx + x^2Ln\left(\frac{1}{u}\right)du - xudx - x^2du = 0$$ Reducimos y factorizamos para separar las variables: $$\frac{1}{x}dx + \frac{Ln(u)+1}{uLn(u)}du = 0$$
3.	Ahora que ya hemos separado variables, integramos:	$$\int \frac{1}{x}dx + \int \frac{Ln(u)+1}{uLn(u)}du = 0$$ Para realizar la segunda integral hacemos la sustitución $$w = Ln(u)\,; dw = \frac{1}{u}du$$ Tenemos entonces:

		$$Lnx + K + \int \frac{w+1}{w} dw = 0$$ Realizamos la integral faltante: $$Ln(x) + K + w + Ln(w) = 0$$ Regresamos a la variable original: $$Ln(x) + Ln\left(\frac{y}{x}\right) + Ln\left(Ln\left(\frac{y}{x}\right)\right) = K$$
4.	Por último aplicamos las condiciones $y(1) = e$	$$Ln(1) + Ln(e) + Ln\big(Ln(e)\big) = K$$ $$K = 1$$
5.	Entonces la solución de la ecuación diferencial es:	R// $Ln(x) + Ln\left(\frac{y}{x}\right) + Ln\left(Ln\left(\frac{y}{x}\right)\right) = 1$

Tema 3: (20 puntos) Una pequeña barra metálica, cuya temperatura inicial era 20 grados centígrados, se deja caer en un gran recipiente que contiene agua hirviendo. ¿Cuánto tiempo le llevará a la barra alcanzar los 90 grados centígrados si se sabe que su temperatura aumentó 2 grados en un segundo? ¿Cuánto le llevará alcanzar los 98 grados centígrados?

No.	Explicación	Operatoria
1.	Utilizaremos la ley de enfriamiento de Newton, ya que se nos dice que el agua está hirviendo utilizaremos la temperatura del ambiente como 100°C	$$\frac{dT}{dt} = K(T - 100)$$ Donde T es la temperatura de la barra, t es el tiempo y K una constante de proporcionalidad. Hacemos separación de variables e integramos: $$\int \frac{dT}{T-100} = k \int dt$$ El resultado de ambas integrales: $$Ln\lvert T - 100\rvert = kt + C$$ Si despejamos la temperatura de la barra: $$T(t) = Ae^{kt} + 100$$
2.	Utilizamos la condición inicial T(0)=20 para encontrar la constante A	$$20 = Ae^0 + 100$$ Entonces: $$A = -80$$
3.	Utilizamos la condición T(1) = 22	$$22 = -80e^k + 100$$

		$k = Ln\left\|\frac{78}{80}\right\| = -0.02532$
4.	La función que describe la temperatura en el tiempo es:	$T(t) = -80e^{-0.02532t} + 100$
5.	Ahora encontramos t para T=90	$90 = -80e^{-0.02532t} + 100$ $t = \frac{Ln\left(\frac{10}{80}\right)}{-0.02532}$ a) $t = 82segundos$
6.	Ahora encontramos t paraT=98	$98 = -80e^{-0.02532t} + 100$ $t = \frac{Ln\left(\frac{2}{80}\right)}{-0.02532}$ b) $t = 145.7\ segundos$

Tema 4: (20 puntos) Un tanque de 1000 litros, inicialmente contiene 300 litros de fluido en el cual se han disuelto 30 gramos de sal. La salmuera, que contiene un gramo de sal por litro, se bombea hacia el depósito a una velocidad de 8 L/min; perfectamente mezclada, la solución se bombea se bombea hacia afuera a 5L/min.

a. Determine una función para determinar la cantidad de sal que hay en el tanque en cualquier momento.
b. Determine en qué momento se llenará el tanque.

No.	**Explicación**	**Operatoria**
1.	Sea A la cantidad de sal en el tanque en un tiempo t Sabemos que la razón de cambio de la cantidad de sal en el tanque es la sal que entra menos la que sale	$Sal\ que\ entra = \frac{1g}{L} * \frac{8L}{min} = \frac{8g}{min}$ $Sal\ que\ sale = \frac{5L}{min} * \frac{A}{300+3t}\frac{g}{L} = \frac{5A}{300+3t}\frac{g}{min}$ De modo que la ecuación diferencial es: $\frac{dA}{dt} = 8 - \frac{5A}{300+3t}$ Si la acomodamos:

		$$\frac{dA}{dt}+\frac{5A}{300+3t}=8$$
2.	Obtenemos el factor integrante y lo multiplicamos por toda la ecuación:	$factor\ integrante\!: e^{5\int\frac{1}{300+3t}dt}=(300+3t)^{\frac{5}{3}}$ Al multiplicarse por toda la ecuación se puede expresar el lado izquierdo como: $\frac{d}{dt}\left[A(300+3t)^{\frac{5}{3}}\right]=8(300+3t)^{\frac{5}{3}}$
3.	Multiplicamos por dt ambos lados e integramos:	$\int d\left[A(300+3t)^{\frac{5}{3}}\right]=8\int(300+3t)^{\frac{5}{3}}dt$
4.	Resolvemos las integrales y despejamos A:	$A=300+3t+C(300+3t)^{-\frac{5}{3}}$
5.	Según las condiciones iniciales dadas por el problema tenemos que: A(0) =30	$30=300+C(300)^{-\frac{5}{3}}$ Despejando C: $C=-3{,}622{,}937$
6.	Obtenemos entonces la cantidad A de sal en el tanque en función del tiempo:	R//$A=300+3t-3{,}622{,}937(300+3t)^{-\frac{5}{3}}$
7.	Ya que la ecuación que describe el volumen total de líquido está dada por: $300+3t$ Solo debemos encontrar t tal que el volumen sea 1000, es decir, cuando está llena.	$300+3t=1{,}000$ Despejamos t: R// $t=233.33\ min$