UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-114-2-M-1-00-2017

CURSO:	**Matemática Intermedia 3**
SEMESTRE:	**Primero**
CÓDIGO DEL CURSO:	**114**
TIPO DE EXAMEN:	**Segundo Examen Parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**22 de febrero de 2017**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Axel Iván Ruiz García**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Axel Iván Ruiz García**
REVISO EL EXAMEN:	**Ing. Eder Paz**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MATEMÁTICA INTERMEDIA 3
JORNADA MATUTINA
FEBRERO 22, 2017

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL Temario "π"

INSTRUCCIONES

- **No se permite el uso de teléfono ni calculadora programable durante el examen.**
- **Trabaje de forma clara y ordenada, dejando constancia de todo su procedimiento paso a paso, de lo contrario no tendrá validez su respuesta.**
- **Para tener derecho a revisión sus respuestas deben estar con lapicero.**

Tema No. 1 (25 puntos)

Un tanque cilíndrico con diámetro y altura de 1 m, tiene 500 litros de agua pura, al cual le entran dos flujos uno de agua a $5\,L/min$ y otro de alcohol puro a $5\,L/min$. La solución bien mezclada sale del tanque a la razón de $5\,L/min$.

(a) Determine la cantidad de agua pura $A(t)$ en el tanque a los $t\ min$.
(b) Encuentre el tiempo de llenado del tanque $(1000\ L = 1\ m^3)$.
(c) ¿Cuántos litros de agua hay en el tanque cuando está lleno?

Tema No. 2 (25 puntos)

Un termómetro que indica 70°F se coloca en un horno precalentado a una temperatura constante. A través de una ventana de vidrio en la puerta del horno, un observador registra que el termómetro lee 110°F después de 1 minuto y 145°F después de 3 minutos. El termómetro se retira cuando tiene el 90% de la temperatura del horno

(a) ¿Cuál es la temperatura del horno?
(b) ¿A los cuantos minutos se retira el termómetro del horno?
(c) Determine la razón de cambio en la temperatura del termómetro cuando se retira del horno.

Tema No. 3 (25 puntos)

Un tanque lleno de gasolina tiene la forma de un cilindro con 5 pies de radio y está colocado con el eje en posición horizontal. Al retirarse un tapón en el fondo del tanque la profundidad disminuye un pie en un minuto.

(a) ¿Cuánto tardara la gasolina en vaciarse por completo?
(b) Encuentre la profundidad en función del tiempo.
(c) Determine la profundidad del liquido a los $27\ min$.

Tema No. 4 (25 puntos)

Imagine que tiene una hoja de papel tan grande como quiera y que puede doblar la hoja por la mitad tantas veces como quiera. Utilice un modelo matemático visto en clase para determinar, ¿Cuántas veces tendrá que doblar la hoja de manera que la espesura obtenida pueda cubrir la distancia de la Tierra a la Luna?
(Distancia $Tierra - Luna = 380\ 000\ km$, espesura de la hoja de papel $= 0.1\ mm$)

Nombré Completo: ____

Número de Carné: ____

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

TEMA 1

Un tanque cilíndrico con diámetro y altura de 1 m, tiene 500 litros de agua pura, al cual le entran dos flujos uno de agua a $5\,L/min$ y otro de alcohol puro a $5\,L/min$. La solución bien mezclada sale del tanque a la razón de $5\,L/min$.

(a) Determine la cantidad de agua pura $A(t)$ en el tanque a los $t\ min$.
(b) Encuentre el tiempo de llenado del tanque $(1000\ L = 1\ m^3)$.
(c) ¿Cuántos litros de agua hay en el tanque cuando está lleno?

Sea A(t) la cantidad de agua en el tanque. Sabemos que:

$$\frac{dA}{dt} = Razón\ de\ entrada - Razón\ de\ salida$$

$$Razón\ de\ entrada\ de\ agua = 5$$

Ya que salen 5 litros de líquido y entran 5 de agua y 5 de etanol, es decir, cada minuto entran 5 litros de líquido más de los que salen, la concentración también va cambiando con el tiempo.

$$Razón\ de\ salida\ de\ agua = 5 * \frac{A}{500+5t}$$

La ecuación diferencial que resolveremos es entonces:	$$\frac{dA}{dt} = 5 - \frac{5A}{500+5t}$$
Ordenamos la ecuación diferencial:	$$\frac{dA}{dt} + \frac{A}{100+t} = 5$$
El factor integrantes es: $$e^{\int 100+tdt} = 100+t$$ Al multiplicar toda la ecuación por el factor integrante y multiplicar por dt también, aplicando la operación integral de ambos lados:	$$\int d[(100+t)A] = \int 5(100+t)dt$$
Al integrar de ambos lados tenemos:	$$(100+t)A = 5t\left(100+\frac{1}{2}t\right)+C$$
Si dividimos entre (100+t):	$$A = \frac{5t\left(100+\frac{1}{2}t\right)+C}{(100+t)}$$
Si aplicamos la condición inicial: $$A(0) = 500$$	$$500 = \frac{C}{100}$$ Entonces: $$C = 50{,}000$$
Al sustituir en la solución de la ecuación diferencial, podemos contestar la pregunta del inciso a)	$$A = \frac{5t\left(100+\frac{1}{2}t\right)+50{,}000}{(100+t)}$$
Para responder el inciso b) primero debemos encontrar la capacidad máxima del tanque litros, sabiendo que: $$r = 0.5m$$ $$h = 1m$$	$$V_{máx} = \pi(0.5)^2(1)m^3$$ Que en litros es: $$V_{máx} = 785.4\ litros$$
Anteriormente habíamos encontrado que el	$$785.4 = 500+5t$$

volumen de líquido total en el tanque en el tiempo t debido a que entran al tanque 5 litros de líquido más de los que salen en cada minuto, está dado por: $$V(t) = 500 + 5t$$ Encontramos t para V=785.4 litros.	$$t = 57.08\ minutos$$
Para encontrar la cantidad de agua en el tanque cuando este se llena simplemente debemos sustituir el tiempo en el que se llena en la función que nos da la cantidad de agua en t:	$$A = \frac{5(57.08)\left(100 + \frac{1}{2} * 57.08\right) + 50{,}000}{100 + 57.08}$$ De modo que: $$A = 551.9\ Litros$$

Concluimos que:

a) La cantidad de agua en el tanque en un tiempo t está dada por:

$$\boldsymbol{A = \frac{5t\left(100 + \frac{1}{2}t\right) + 50{,}000}{(100 + t)}}$$

b) El tanque se llena por completo en **57.08 minutos**.

c) La cantidad de agua en el tanque en el momento en que se llena es de **551.9 litros**.

TEMA 2

Un termómetro que indica 70°F se coloca en un horno precalentado a una temperatura constante. A través de una ventana de vidrio en la puerta del horno, un observador registra que el termómetro lee 110°F después de 1 minuto y 145°F después de 3 minutos. El termómetro se retira cuando tiene el 90% de la temperatura del horno

(a) ¿Cuál es la temperatura del horno?

(b) ¿A los cuantos minutos se retira el termómetro del horno?

(c) Determine la razón de cambio en la temperatura del termómetro cuando se retira del horno.

Utilizaremos la ley de enfriamiento y calentamiento de Newton:

$$\frac{dT}{dt} = k(A - T)$$

Donde T es la temperatura del objeto en el tiempo t y A es la temperatura del ambiente.

Resolvemos la ecuación separando variables y aplicando la operación integral.	$$\int \frac{dT}{A - T} = \int k dt$$
Integramos de ambos lados y despejamos T:	$$T = -Ce^{-kt} + A$$
Para encontrar las constates C, k y A tenemos la condiciones siguientes: $$T(0) = 70$$ $$T(1) = 110$$ $$T(3) = 145$$ Si las introducimos en nuestra función obtenemos las ecuaciones:	1) $A = 70 + C$ 2) $110 = A - Ce^{-k}$ 3) $145 = A - Ce^{-3k}$
Si restamos 3) y 2), despejando C	4) $C = \frac{35}{e^{k} - e^{-3k}}$
Sustituimos 1) en 2):	5) $110 = 70 + C[1 - e^{-k}]$
Ahora sustituimos 4) en 5):	$$110 = 70 + \frac{35[1 - e^{-k}]}{e^{-k} - e^{-3k}}$$

	Al simplificar obtenemos: $$\frac{8}{7}=\frac{1-e^{-k}}{e^{-k}(1-e^{-2k})}$$
Sea: $$z=e^{-k}$$ $$z^2=e^{-2k}$$ Entonces la ecuación anterior se expresa como:	$$\frac{8}{7}z(1-z^2)=1-z$$ Si factorizamos y simplificamos la diferencia de cuadrados en el lado izquierdo: $$z^2+z-\frac{7}{8}=0$$
Utilizamos la formula cuadrática para obtener el valor de z:	$$z=0.5607$$ Por tanto: $$e^{-k}=0.56070$$ Entonces: $$k=0.5786$$
Sustituimos k en 4)	$$C=\frac{35}{e^{-0.5786}-e^{-3(0.5786)}}$$ Entonces: $$C=-91.04$$
Sustituimos C en 1) y podemos contestar el inciso a) que nos pregunta la temperatura del horno:	$$A=161.04$$
Sustituimos el 90% de A en la ecuación y despejamos t	$$(0.9)(161.04)=161.04-91.04e^{-0.5786t}$$ Por tanto: $$t=3\ minutos$$
Sustituimos t=3 en la ecuación que describe la razón de cambio:	$$\frac{dT}{dt}=0.5786(161.04-0.9*161.04)$$ $$\frac{dT}{dt}=9.32\ º\frac{F}{min}$$

Concluimos que:

a) La temperatura del horno es de **161.04 ºF**.
b) Llega al 90% de su temperatura máxima después **de 3 minutos** de estar dentro del horno.
c) La razón a la que la temperatura aumenta cuando se saca del horno es de **9.32 ºF/min**.

TEMA 3

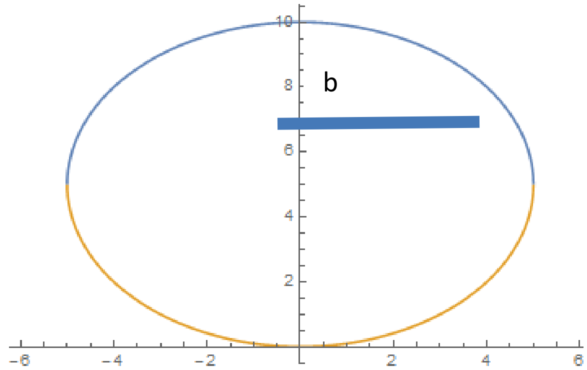
Un tanque lleno de gasolina tiene la forma de un cilindro con 5 pies de radio y está colocado con el eje en posición horizontal. Al retirarse un tapón en el fondo del tanque la profundidad disminuye un pie en un minuto.

(a) ¿Cuánto tardara la gasolina en vaciarse por completo?
(b) Encuentre la profundidad en función del tiempo.
(c) Determine la profundidad del líquido a los $27\ min$.

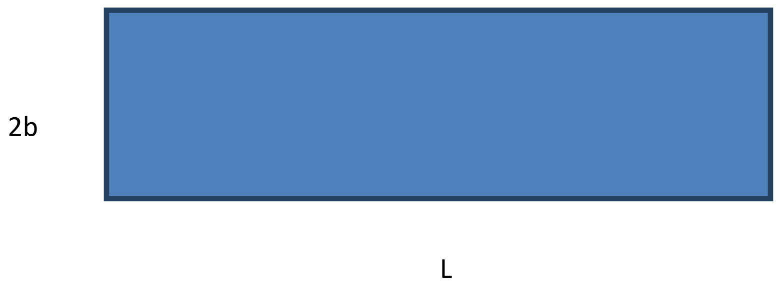
Utilizaremos la ley de torriccelli para el vaciado de tanques.

$$\frac{dh}{dt}=-\frac{A_a}{A_e}\sqrt{2gh}$$

Para ello necesitaremos obtener el área del espejo de agua. El área transversal del tanque se ve así:



Ya que no se nos dice cuál es el largo del tanque, le llamaremos “L”. Es espejo de agua se ve entonces así:



Por tanto, el área del espejo de agua es:

$$A_e = 2bl$$

De la figura del área transversal del tanque, se ve que podemos modelar la distancia b, del centro del tanque a uno de sus extremos a través de una recta horizontal paralela al eje x de la siguiente forma, donde h es la altura del tanque que nos interesa obtener, a través de una ecuación de la circunferencia con centro en el punto (0,5).	$b^2 + (h-5)^2 = 25$ $b = \sqrt{10h - h^2}$
Entonces el área del espejo de agua es:	$A_e = 2L\sqrt{10h - h^2}$
Ya que no sabemos cuál es el área del agujero en el fondo del tanque, sustituimos toda la información que tenemos en la ecuación de la ley de Torriccelli:	$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_a\sqrt{2(32) * h}}{2L\sqrt{10h - h^2}}$
Si simplificamos la ecuación anterior, sacando el 64 de la raíz cuadrada y factorizando la h del denominador en la raíz, obtenemos lo siguiente:	$\frac{dh}{dt} = -\frac{4A_a}{L\sqrt{10 - h}}$
Podemos separar variables y aplicar la operación integral:	$\int \sqrt{10 - h}\, dh = -\int \frac{4A_a}{L} dt$
Si realizamos la integral de ambos lados de la ecuación tenemos:	$-\frac{2}{3}(10 - h)^{\frac{3}{2}} = -4\frac{A_a}{L}t + C$
Ahora que hemos obtenido la solución de la ecuación diferencial podemos aplicar las condiciones iniciales dadas por el problema. Se nos dice que al principio el tanque está lleno, es decir:	$-\frac{2}{3}(10 - 10)^{\frac{3}{2}} = -\frac{4A_a}{L}(0) + C$ Por tanto: $C = 0$

$h(0) = 10$	
La siguiente condición dada por el problema es que después de un minuto, la altura ha disminuido en un pie, es decir: $h(1) = 9$	$\frac{2}{3}(10-9)^{\frac{3}{2}} = \frac{4A_a}{L}(1)$ Y al despejar obtenemos: $\frac{A_a}{L} = \frac{1}{6}$
Al sustituir C y la razón entre el área del agujero y el largo L del tanque en la solución de la ecuación diferencial tenemos que:	$(10-h)^{\frac{3}{2}} = t$
Ahora podemos responder el inciso a) donde se nos pide encontrar el tiempo en el que se vacía, es decir, cuando h=0:	$(10-0)^{\frac{3}{2}} = t$ Entonces: $t = 31.6\, minutos$
Para responder el inciso b) simplemente debemos despejar h de la ecuación obtenida anteriormente.	$h = 10 - t^{\frac{2}{3}}$
Para responder c) Debemos sustituir t=27min en la expresión para h en función de t del inciso b)	$h = 10 - 27^{\frac{2}{3}}$ $h = 1\, pie$

Concluimos que:

a) El tanque se vacía en **31.6 minutos**.
b) La altura h del tanque en función del tiempo está dada por: $\boldsymbol{h = 10 - t^{\frac{2}{3}}}$.
c) Después de 27 minutos del vaciado del tanque, la altura del agua será de **1 pie medido**

TEMA 4

Imagine que tiene una hoja de papel tan grande como quiera y que puede doblar la hoja por la mitad tantas veces como quiera. Utilice un modelo matemático visto en clase para determinar, ¿Cuántas veces tendrá que doblar la hoja de manera que la espesura obtenida pueda cubrir la distancia de la Tierra a la Luna?
(Distancia $Tierra - Luna = 380\ 000\ km$, espesura de la hoja de papel $= 0.1\ mm$)

Sea n el número de dobleces y x el grosor total de la hoja doblada. Con cada doblez el grosor de la hoja aumenta, pero ese aumento depende de cuál es el grosor actual de la hoja. Traducido a un modelo matemático: $\frac{dx}{dn} = kx$

Resolvemos la ecuación diferencial separando variables y aplicando la operación integral.	$\int \frac{dx}{x} = \int kdn$
Al resolver la integral de ambos lados tenemos lo siguiente.	$x = Ce^{kn}$
Cuando n es cero, el grosor total es el de la hoja sin doblar, es decir: (1) $x(0) = x_0$ Y cuando se doble una vez, el grosor total será el doble de la hoja sin doblar: (2) $x(1) = 2x_0$ De lo cual obtenemos al sustituir en la ecuación diferencial.	(1) $x = x_0 e^{k}$ (2) $2x_0 = x_0 e^{k}$ Por tanto: $k = \ln(2)$

Al sustituir los valor encontrados anteriormente en la solución de la ecuación diferencial	$x = x_0 2^n$
Ahora, según los datos del problema, debemos encontrar n cuando: $$x = 380 * 10^6$$ Y $$x_0 = 0.1 * 10^{-3}$$ Sustituimos esos datos y despejamos n.	$$(380 * 10^6) = (0.1 * 10^{-3}) * 2^n$$ $$n = \frac{\ln\left(\frac{380 * 10^6}{0.1 * 10^{-3}}\right)}{\ln(2)}$$

Tenemos por tanto que: $n \cong 42$

Se necesitan aproximadamente 42 dobleces para poder tener una hoja del grosor igual a la distancia de la tierra a la luna.