CLAVE-114-2-V-2-00-2015

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

SEMESTRE:	PRIMERO
CÓDIGO DEL CURSO:	114
CURSO:	MATEMÁTICA INTERMEDIA 3
JORNADA:	VESPERTINA
TIPO DE EXAMEN:	SEGUNDO EXAMEN PARCIAL
NOMBRE DE LA PERSONA QUE RESOLVIÓ EL EXAMEN:	SHARONN PÚ
NOMBRE DE LA PERSONA QUE REVISÓ EL EXAMEN:	INGA. ERICKA CANO

17 DE ABRIL DE 2015

Tema No. 1 (10 Puntos)

Se aplica una fuerza electromotriz de 450 voltios a un circuito LR con 0.25 henrios de inductancia y 90 ohm de resistencia. $i(0) = 0$. Determine la corriente cuando "t" tiende al infinito.

Tema 2 (20 Puntos)

La población del mundo era de 4,450 millones en 1980 y de 5,300 millones en 1990. Encuentre un modelo exponencial para estos datos y úselo para predecir la población del mundo en el año 2020. B) ¿Cuándo sobrepasara a los 10,000 millones la población mundial?

Tema 3 (20 Puntos)

Un cadáver se encontró dentro de un cuarto cerrado en una casa donde la temperatura era constante a $70°F$. Al tiempo del descubrimiento la temperatura del corazón del cadáver se determinó de $85°F$. Una hora después una segunda medición mostro que la temperatura del corazón era de $80°F$. Suponga que el tiempo de la muerte corresponde a t = 0. Y que la temperatura del corazón en ese momento era de $98.6°F$. Determine ¿cuantas horas pasaron antes de que se encontrará el cadáver?

Tema 4 (20 Puntos)

Un taque contiene 800 galones de agua pura. Le entra salmuera que tiene 6 libras de sal por galón a razón de 10 gal/min. La solución bien mezclada sale del tanque a razón de 8 gal/min. ¿Determine la cantidad A(t) de gramos de sal que hay en el tanque después de 30 minutos?.

Tema 5 (15 Puntos)

El estroncio tiene una vida media de 25 años.

a) Encuentre la masa que queda de una muestra de 18 mg. De estroncio después de 90 años.
b) Cuanto tiempo pasaría para que la masa decayera hasta 2 mg.

Tema 6 (15 Puntos)

Una momia egipcia descubierta hace poco se determinó que el 45% de su carbono 14 se había desintegrado. ¿Hallar la antigüedad de esa momia egipcia?

Tema No. 1 (10 Puntos)

Se aplica una fuerza electromotriz de 450 voltios a un circuito LR con 0.25 henrios de inductancia y 90 ohm de resistencia. $i(0) = 0$. Determine la corriente cuando "t" tiende al infinito.

Solución:
Primero realizamos un resumen de los datos que nos están proporcionando los cuales son:

$$\boldsymbol{E = 450\, Voltios}$$
$$\boldsymbol{L = 0.25\, Henrios}$$
$$\boldsymbol{R = 90\, Ohm}$$

Condición inicial
$\boldsymbol{i(0) = 0}$

La Ecuación Diferencial (E. D.) a utilizar es:

$$\boldsymbol{L\frac{di}{dt} + Ri = E}$$

Sustituyendo los valores proporcionados y llevando la E. D. a forma estándar:

$$\boldsymbol{(0.25)\frac{di}{dt} + 90i = 450}$$
$$\boldsymbol{\left((0.25)\frac{di}{dt} + 90i = 450\right) * 4}$$
$$\boldsymbol{\frac{di}{dt} + 360i = 1800}$$

Resolviendo la ecuación diferencial.

Encontrando factor de integración:

$$\boldsymbol{e^{\int 360dt} = e^{360t}}$$

Multiplicando el F. I. con la E.D. y simplificando.

$$\boldsymbol{\left(\frac{di}{dt} + 360i = 1800\right) * e^{360t}}$$

$$\boldsymbol{e^{360t}\frac{di}{dt} + 360e^{360t}i = 1800e^{360t}}$$

$$\boldsymbol{\frac{d(e^{360t}i)}{dt} = 1800e^{360t}}$$

Integrando ambos lados, simplificando y despejando para $\boldsymbol{i}$.

$$\boldsymbol{\int \frac{d(e^{360t}i)}{dt} = \int 1800e^{360t}dt}$$

$$\boldsymbol{e^{360t}i = \frac{1800e^{360t}}{360} + C}$$

$$\boldsymbol{e^{360t}i = 5e^{360t} + C}$$

$$\boldsymbol{i(t) = 5 + Ce^{-360t}}$$

Aplicando condición inicial para encontrar el valor $\boldsymbol{C}$.

$$\boldsymbol{0 = 5 + Ce^{-360(0)}}$$

$$\boldsymbol{0 = 5 + C(1)}$$

$$\boldsymbol{C = -5}$$

Sustituyendo el valor de $\boldsymbol{C}$

$$\boxed{\boldsymbol{i(t) = 5 - 5e^{-360t}}}$$

Encontrando $\boldsymbol{i}$ cuando $\boldsymbol{t}$ tiende al infinito:

$$\boldsymbol{i(\infty) = 5 - 5e^{-360(\infty)}}$$

$$\boldsymbol{i(\infty) = 5 - 5(0)}$$

$$\boxed{\boldsymbol{i(\infty) = 5}}$$

Cuando el tiempo tiende al infinito tenemos un *Corriente* de *5 Amperios.*

Tema 2 (20 Puntos)

La población del mundo era de 4,450 millones en 1980 y de 5,300 millones en 1990. Encuentre un modelo exponencial para estos datos y úselo para predecir la población del mundo en el año 2020. B) ¿Cuándo sobrepasara a los 10,000 millones la población mundial?

Solución:
Tabulando los datos y tomando en cuenta que el 1980 será $t = 0$, tenemos:

t (Años)	0	10	40	?
Población (Millones)	4,450	5,300	?	10,000

Para crecimiento poblacional tenemos la siguiente ecuación diferencial (E. D.).

$$\boldsymbol{\frac{dP}{dt} - kP = 0 \qquad\qquad P(0) = 4,450}$$

Resolviendo la E. D.

Encontrando factor de integración:

$$\boldsymbol{e^{\int -kdt} = e^{-kt}}$$

Multiplicando el F. I. con la E.D. y simplificando.

$$\boldsymbol{\left(\frac{dP}{dt} - kP = 0\right) * e^{-kt}}$$

$$\boldsymbol{e^{-kt}\frac{dP}{dt} - ke^{-kt}P = 0}$$

$$\boldsymbol{\frac{d(e^{-kt}P)}{dt} = 0}$$

Integrando ambos lados, simplificando y despejando para $\boldsymbol{P}$.

$$\boldsymbol{\int \frac{d(e^{-kt}P)}{dt} = \int 0dt}$$

$$\boldsymbol{e^{-kt}P = C}$$

$$\boldsymbol{P = Ce^{kt}}$$

$$\boldsymbol{P(t) = Ce^{kt}}$$

Aplicando condición inicial para encontrar el valor de $\boldsymbol{C}$.

$$4,450 = Ce^{k(0)}$$

$$4,450 = C(1)$$

$$C = 4,450$$

Sustituyendo el valor de $\boldsymbol{C}$

$$P(t) = 4,450e^{kt}$$

Encontrando el valor de la constante de proporcionalidad $\boldsymbol{k}$ en este caso de crecimiento poblacional utilizando los datos proporcionados.

$$P(10) = 5{,}300$$

$$5,300 = 4,450e^{k(10)}$$

$$\frac{5,300}{4,450} = e^{k(10)}$$

$$\frac{530}{445} = e^{k(10)}$$

$$ln\left(\frac{530}{445}\right) = ln\left(e^{k(10)}\right)$$

$$ln\left(\frac{530}{445}\right) = 10k$$

$$k = \frac{ln\left(\frac{530}{445}\right)}{10} \cong 0.017480$$

Sustituyendo el valor de $\boldsymbol{k}$

$$P(t) = 4,450e^{0.017480t}$$

Resolviendo para un tiempo $\boldsymbol{t = 40}$ sustituimos en la ecuación anterior.

$$P(40) = 4,450e^{0.017480(40)}$$

$$P(40) = 4,450e^{0.6992}$$

$$\boxed{P(40) = 8954.03 \cong\ 8954}$$

Para el año 2020 se tendrá una población de 8,954 millones.

Resolviendo para una población de 10,000 millones despejamos para $\boldsymbol{t}$.

$$10,000 = 4,450e^{0.017480t}$$

$$\frac{10,000}{4,450} = e^{0.017480t}$$

$$ln\left(\frac{1,000}{445}\right) = ln(e^{0.017480t})$$

$$ln\left(\frac{1,000}{445}\right) = 0.017480t$$

$$\boxed{t = \frac{ln\left(\frac{1,000}{445}\right)}{0.017480} \cong 46.32}$$

En el año 2026 se tendrá una población de 10,000 millones.

Tema 3 (20 Puntos)

Un cadáver se encontró dentro de un cuarto cerrado en una casa donde la temperatura era constante a 70°F. Al tiempo del descubrimiento la temperatura del corazón del cadáver se determinó de 85°F. Una hora después una segunda medición mostro que la temperatura del corazón era de 80°F. Suponga que el tiempo de la muerte corresponde a t = 0. Y que la temperatura del corazón en ese momento era de 98.6°F. Determine ¿cuantas horas pasaron antes de que se encontrará el cadáver?

Solución:
Tabulando los datos:

$Temperatura$ $Ambiente$ $(T_m, °F)$	70		
t $(Horas)$	0	t	$t+1$
$Temperatura$ $(°F)$	98.6	85	80

Para cambios de temperatura tenemos la siguiente ecuación diferencial (E. D.)

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 70) \qquad T(0) = 98.6$$

Resolviendo la E. D. por separación de variables.

$$\frac{dT}{(T-70)} = kdt$$

Integrando ambos lados.

$$\int \frac{dT}{(T-70)} = \int kdt$$
$$ln|T - 70| = kt + A$$
$$T - 70 = e^{kt+A}$$
$$T = 70 + Ce^{kt}$$

Aplicando condición inicial para encontrar el valor de $\boldsymbol{C}$.

$$98.6 = 70 + Ce^{k(0)}$$
$$98.6 = 70 + C(1)$$
$$98.6 - 70 = C$$
$$C = 28.6$$

Sustituyendo el valor de $\boldsymbol{C}$

$$T = 70 + 28.6e^{kt}$$

Para encontrar el valor de $\boldsymbol{t}$ utilizamos las dos condiciones restantes.

Condición $T(t) = 85$

$$85 = 70 + 28.6e^{kt}$$
$$85 - 70 = 28.6e^{kt}$$
$$\frac{15}{28.6} = e^{kt}$$
$$ln\left(\frac{15}{28.6}\right) = kt$$
$$k = \frac{ln\left(\frac{15}{28.6}\right)}{t} \cong \frac{-0.64536}{t}$$

Condición $T(t+1) = 80$

$$80 = 70 + 28.6e^{k(t+1)}$$
$$80 - 70 = 28.6e^{k(t+1)}$$
$$\frac{10}{28.6} = e^{k(t+1)}$$
$$ln\left(\frac{10}{28.6}\right) = k(t+1)$$
$$k = \frac{-1.05082}{t+1}$$

Igualando las constantes $\boldsymbol{k}$ y simplificando.

$$\frac{-0.64536}{t} = \frac{-1.05082}{t+1}$$

$$\frac{t+1}{t} = \frac{1.05082}{0.64536}$$

$$t + 1 = 1.62828t$$
$$1.62828t - t = 1$$
$$0.62828t = 1$$
$$\boxed{t = \frac{1}{0.62828} \cong 1.60}$$

El tiempo que transcurrido antes de encontrar el cadáver es de 1.60 horas.

Tema 4 (20 Puntos)

Un taque contiene 800 galones de agua pura. Le entra salmuera que tiene 6 libras de sal por galón a razón de 10 gal/min. La solución bien mezclada sale del tanque a razón de 8 gal/min. ¿Determine la cantidad A(t) de gramos de sal que hay en el tanque después de 30 minutos?.

Solución:
Primero realizamos un resumen de los datos que nos están proporcionando los cuales son:

$$C_i = 6\ {}^{lb}/_{gal}$$
$$R_i = 10\ {}^{gal}/_{min}$$
$$R_o = 8\ {}^{gal}/_{min}$$

$$A(30) = ?$$

Condición inicial

$$A(0) = 0$$

Para mezcla de tenemos la siguiente ecuación diferencial (E. D.)

$$\frac{dA}{dt} = R_i C_i - \frac{AR_o}{V_o + (R_o - R_i)t}$$

Sustituyendo valores en la E. D.

$$\frac{dA}{dt} = (10)(6) - \frac{A(8)}{800 + (8 - 10)t}$$

Simplificando.

$$\frac{dA}{dt} = 60 - \frac{8A}{800 + 2t}$$

$$\frac{dA}{dt} = 60 - \frac{8A}{2(400 + t)}$$

$$\frac{dA}{dt} = 60 - \frac{4A}{400 + t}$$

$$\frac{dA}{dt} + \frac{4A}{400 + t} = 60$$

Resolviendo la E. D.

Encontrando factor de integración:

$$e^{\int \frac{4}{400+t} dt} = e^{ln(400+t)^4} = (400 + t)^4$$

Multiplicando el F. I. con la E.D. y simplificando.

$$\left(\frac{dA}{dt} + \frac{4A}{400 + t} = 60\right) * (400 + t)^4$$

$$(400 + t)^4 \frac{dA}{dt} + \frac{4A((400 + t)^4)}{400 + t} = 60(400 + t)^4$$

$$\frac{d((400 + t)^4 * A)}{dt} = 60(400 + t)^4$$

Integrando ambos lados, simplificando y despejando para $\boldsymbol{A}$.

$$\int \frac{d((400 + t)^4 * A)}{dt} = \int 60(400 + t)^4 dt$$

$$(400 + t)^4 * A = \frac{60}{5}(400 + t)^5 + C$$

$$(400 + t)^4 * A = 12(400 + t)^5 + C$$

$$A(t) = 12(400 + t) + C(400 + t)^{-4}$$

Aplicando condición inicial para encontrar el valor $\boldsymbol{C}$.

$$0 = 12(400 + 0) + C(400 + 0)^{-4}$$

$$0 = 12(400) + C(400)^{-4}$$

$$-4800 = C(400)^{-4}$$

$$C = -4800(400)^4 \cong -1.2288 * 10^{14}$$

Sustituyendo el valor de $\boldsymbol{C}$

$$A(t) = 12(400 + t) - 1.2288 * 10^{14}(400 + t)^{-4}$$

Encontrando $\boldsymbol{A(30)}$, utilizando la ecuación anterior y simplificando.

$$\boldsymbol{A(30) = 12(400+30) - 1.2288 * 10^{14}(400+30)^{-4}}$$

$$\boldsymbol{A(30) = 12(430) - 1.2288 * 10^{14}(430)^{-4}}$$

$$\boldsymbol{A(30) = 5160 - 1.2288 * 10^{14}(430)^{-4}}$$

$$\boldsymbol{A(30) = 5160 - 3594.24}$$

$$\boldsymbol{A(30) = 1565.76\, lb}$$

Convirtiendo a gramos $\boldsymbol{A(30)}$

$$\boldsymbol{1565.76\, lb * \frac{454\, g}{1\, lb} = 710855.04\, g}$$

$$\boxed{\boldsymbol{A(30) = 710855.04\, g}}$$

Tema 5 (15 Puntos)

El estroncio tiene una vida media de 25 años.

a) Encuentre la masa que queda de una muestra de 18 mg. De estroncio después de 90 años.
b) Cuanto tiempo pasaría para que la masa decayera hasta 2 mg.

Solución:
Tabulando los datos, tenemos:

t (Años)	0	25	90	?
$Masa\ (M)$ (Miligramos)	18	9	?	2

Para vida media del estroncio tenemos la siguiente ecuación diferencial (E. D.).

$$\boldsymbol{\frac{dM}{dt} - kM = 0} \qquad\qquad \boldsymbol{M(0) = 18}$$

Resolviendo la E. D.

Encontrando factor de integración:

$$\boldsymbol{e^{\int -kdt} = e^{-kt}}$$

Multiplicando el F. I. con la E.D. y simplificando.

$$\boldsymbol{\left(\frac{dM}{dt} - kM = 0\right) * e^{-kt}}$$

$$\boldsymbol{e^{-kt}\frac{dM}{dt} - ke^{-kt}A = 0}$$

$$\boldsymbol{\frac{d(e^{-kt}M)}{dt} = 0}$$

Integrando ambos lados, simplificando y despejando para A.

$$\boldsymbol{\int \frac{d(e^{-kt}M)}{dt} = \int 0dt}$$

$$\boldsymbol{e^{-kt}M = C}$$

$$\boldsymbol{M = Ce^{kt}}$$

$$\boldsymbol{M(t) = Ce^{kt}}$$

Aplicando condición inicial para encontrar el valor de $\boldsymbol{C}$.

$$\mathbf{18} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{k}(\mathbf{0})}$$

$$\mathbf{18} = \boldsymbol{C}(\mathbf{1})$$

$$\boldsymbol{C} = \mathbf{18}$$

Sustituyendo el valor de $\boldsymbol{C}$

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{t}) = \mathbf{18}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{kt}}$$

Encontrando el valor de la constante de proporcionalidad $\boldsymbol{k}$, utilizando los datos proporcionados.

$$M(25) = 9$$

$$\mathbf{9} = \mathbf{18}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{k}(\mathbf{25})}$$

$$\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{18}} = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{k}(\mathbf{25})}$$

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{k}(\mathbf{25})}$$

$$\boldsymbol{ln}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right) = \boldsymbol{ln}(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{k}(\mathbf{25})})$$

$$\boldsymbol{ln}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right) = \mathbf{25}\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{ln}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)}{\mathbf{25}} \cong -\mathbf{0.02772}$$

Sustituyendo el valor de $\boldsymbol{k}$

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{t}) = \mathbf{18}\boldsymbol{e}^{-\mathbf{0.02772}\boldsymbol{t}}$$

a) Resolviendo para un tiempo $\boldsymbol{t} = \mathbf{90}$ sustituimos en la ecuación anterior.

$$\boldsymbol{M}(\mathbf{90}) = \mathbf{18}\boldsymbol{e}^{-\mathbf{0.02772}(\mathbf{90})}$$

$$\boldsymbol{M}(\mathbf{90}) = \mathbf{18}\boldsymbol{e}^{-\mathbf{2.4948}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{M}(\mathbf{90}) \cong \mathbf{1.50}\ \boldsymbol{mg}}$$

La masa restante después de transcurrir 90 años es de $\mathbf{1.50}\ \boldsymbol{mg}$.

b) Encontrando el $\boldsymbol{t}$ para una masa restante de $\mathbf{2}\ \boldsymbol{mg}$

$$\mathbf{2} = \mathbf{18}\boldsymbol{e}^{-\mathbf{0.02772}\boldsymbol{t}}$$

$$\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{18}} = \boldsymbol{e}^{-\mathbf{0.02772}\boldsymbol{t}}$$

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}} = \boldsymbol{e}^{-\mathbf{0.02772}\boldsymbol{t}}$$

$$\boldsymbol{ln\left(\frac{1}{9}\right) = ln(e^{-0.02772t})}$$

$$\boldsymbol{ln\left(\frac{1}{9}\right) = -0.02772t}$$

$$\boldsymbol{t = \frac{ln\left(\frac{1}{9}\right)}{-0.02772} \cong 79.26}$$

Para tener un restante de masa de 2 mg tendrá que transcurrir 79.26 años.

Tema 6 (15 Puntos)

Una momia egipcia descubierta hace poco se determinó que el 45% de su carbono 14 se había desintegrado. ¿Hallar la antigüedad de esa momia egipcia?

Solución:
Tabulando los datos y conociendo de que la vida media de $C14$ es de $5{,}600$, tenemos:

t (Años)	0	5600	?
$C14$	1	0.50	0.55

Para vida media del $C14$ tenemos la siguiente ecuación diferencial (E. D.).

$$\boldsymbol{\frac{dA}{dt} - kA = 0 \qquad\qquad A(0) = 1}$$

Resolviendo la E. D.

Encontrando factor de integración:

$$\boldsymbol{e^{\int -kdt} = e^{-kt}}$$

Multiplicando el F. I. con la E.D. y simplificando.

$$\boldsymbol{\left(\frac{dA}{dt} - kA = 0\right) * e^{-kt}}$$

$$\boldsymbol{e^{-kt}\frac{dA}{dt} - ke^{-kt}A = 0}$$

$$\boldsymbol{\frac{d(e^{-kt}A)}{dt} = 0}$$

Integrando ambos lados, simplificando y despejando para A.

$$\boldsymbol{\int \frac{d(e^{-kt}A)}{dt} = \int 0dt}$$

$$\boldsymbol{e^{-kt}A = C}$$

$$\boldsymbol{A = Ce^{kt}}$$

$$\boldsymbol{A(t) = Ce^{kt}}$$

Aplicando condición inicial para encontrar el valor de $\boldsymbol{C}$.

$$\boldsymbol{1 = Ce^{k(0)}}$$

$$\boldsymbol{1 = C(1)}$$

$$\boldsymbol{C = 1}$$

Sustituyendo el valor de $\boldsymbol{C}$

$$\boldsymbol{A(t) = e^{kt}}$$

Encontrando el valor de la constante de proporcionalidad $\boldsymbol{k}$, utilizando los datos proporcionados.

$$A(5{,}600) = 0.50$$

$$\boldsymbol{0.50 = e^{k(5{,}600)}}$$

$$\boldsymbol{ln(0.50) = ln(e^{k(5{,}600)})}$$

$$\boldsymbol{ln(0.50) = 5{,}600k}$$

$$\boldsymbol{k = \frac{ln(0.50)}{5{,}600} \cong -1.2378 * 10^{-4}}$$

Sustituyendo el valor de $\boldsymbol{k}$

$$\boldsymbol{A(t) = e^{-1.2378*10^{-4}t}}$$

Encontrando el $\boldsymbol{t}$ para un $\boldsymbol{55\%}$ de $\boldsymbol{C14}$

$$\boldsymbol{0.55 = e^{-1.2378*10^{-4}t}}$$

$$\boldsymbol{ln(0.55) = ln\left(e^{-1.2378*10^{-4}t}\right)}$$

$$\boldsymbol{ln(0.55) = -1.2378 * 10^{-4}t}$$

$$\boxed{\boldsymbol{t = \frac{ln(0.55)}{-1.2378 * 10^{-4}} \cong 4829.83}}$$

La momia tiene aproximadamente 4,830 años de edad.