UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CLAVE-114-2-V-2-00-2017_sN

CURSO:	**Matemática Intermedia 3**
SEMESTRE:	**Segundo**
CÓDIGO DEL CURSO:	**114**
TIPO DE EXAMEN:	**Segundo Examen Parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**Octubre de 2017**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Jorge Mario Castañeda**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Jorge Mario Castañeda**
REVISO EL EXAMEN:	**Ing. Mario López**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

Segundo Examen Parcial

Nombre:	***Carnet:***

Instrucciones: Resolver los problemas que se presentan a continuación en forma clara, ordenada y dejando constancia del procedimiento.

Tema 1 (25 puntos)
Un tanque contiene 500 galones de agua pura. Se inicia a bombear a dicho tanque salmuera a razón de 5 galones por minuto con una concentración de 2 libras de sal por galón. Simultáneamente, se drena del tanque, la solución bien mezclada, a razón de 10 galones por minuto. Si A determina la cantidad de sal en el tanque en el tiempo t, determinar la cantidad de sal en el tanque 10 minutos después.

Tema 2 (25 puntos)
Un tanque en forma de cono invertido, de 20 pies de altura y 8 pies de radio, está lleno de agua. Inicia a vaciarse por un orificio, de 1/6 pies de radio, ubicado en la parte inferior de dicho tanque (ver figura # 1). Si la constante de fricción y concentración en el orificio es de 3/5, determinar el tiempo necesario para que el tanque se vacíe hasta la mitad de su altura. (Usar g = 32 pie/seg^2).

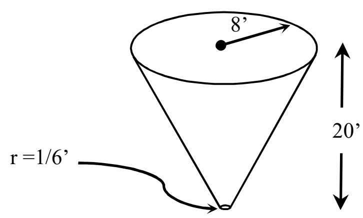


Figura # 1

Tema 3 (25 puntos)
Un cuerpo de masa m cae verticalmente con una resistencia del aire directamente proporcional a la velocidad instantánea (v) de dicho cuerpo. Si la dirección positiva se asume hacia abajo, determinar la ecuación que describe la velocidad del objeto como función del tiempo ($v(t)$) si se sabe que en tiempo cero el objeto tiene una velocidad inicial de v_0.

Tema 4 (25 puntos)
Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 0$$

Con

$$y(0) = 1$$
$$y'(0) = 1$$
$$y''(0) = 1$$

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

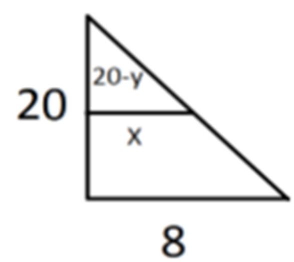
Tema 1 (25 puntos)

Un tanque contiene 500 galones de agua pura. Se inicia a bombear a dicho tanque salmuera a razón de 5 galones por minuto con una concentración de 2 libras de sal por galón. Simultáneamente, se drena del tanque, la solución bien mezclada, a razón de 10 galones por minuto. Si ***A*** determina la cantidad de sal en el tanque en el tiempo ***t***, determinar la cantidad de sal en el tanque 10 minutos después.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Los datos obtenidos del enunciado son:	$C_{entrada} = 2\frac{lb}{gal}$ $V_{entrada} = 5\frac{gal}{min}$ $C_{salida} = \frac{A(t)}{500+5t}\frac{lb}{gal}$ $V_{salida} = 10\frac{gal}{min}$ $A(0) = 0$
2.	Sea A(t) la cantidad de agua en el tanque. Sabemos que:	$\frac{dA}{dt} = Razón\ de\ entrada - Razón\ de\ salida$ $\frac{dA}{dt} = C_{entrada}\,V_{entrada} - C_{salida}\,V_{salida}$
3.	Entonces tenemos	$\frac{dA}{dt} = 2*5 - \frac{A(t)}{500+5t}*10$
4.	Resolvemos la ED de primer orden	$\frac{dA}{dt} + \frac{A(t)}{50+0.5t} = 10$
5.	El factor integrante es: $e^{\int \frac{1}{50+0.5t}dt} = e^{2\ln(100+t)}$ $= (100+t)^2$ Al multiplicar toda la ecuación por el factor integrante y multiplicar por dt también, aplicando la operación integral de ambos lados:	$A(100+t)^2 = \int 10(100+t)^2dt$
6.	Integramos el lado derecho	$A(100+t)^2 = \frac{10}{3}(100+t)^3 + c$
7.	Dividimos entre $(100+t)^2$	$A = \frac{10}{3}(100+t) + c(100+t)^{-2}$

8.	Se evalúa en la condición inicial $A(0) = 0$ para encontrar el valor de la constante c	$0 = \frac{10}{3}(100+0) + c(100+0)^{-2}$ $c = -\frac{10000000}{3}$
9.	Nuestro modelo quedaría	$A = \frac{10}{3}(100+t) - \frac{10000000}{3}(100+t)^{-2}$
10.	Ahora encontraremos A cuando t igual a 10	$A = \frac{10}{3}(100+10)$ $-\frac{10000000}{3}(100+10)^{-2}$ A=91.184
10.	**Concluimos que el tanque tiene 91.184 lb de sal luego de 10 minutos.**	

Tema 2 (25 puntos)
Un tanque en forma de cono invertido, de 20 pies de altura y 8 pies de radio, está lleno de agua. Inicia a vaciarse por un orificio, de 1/6 pies de radio, ubicado en la parte inferior de dicho tanque (ver figura # 1). Si la constante de fricción y concentración en el orificio es de 3/5, determinar el tiempo necesario para que el tanque se vacíe hasta la mitad de su altura. (Usar g = 32 pie/seg^2).

No.	Explicación	Operatoria
1.	Por semejanza de triángulos se modela el área transversal del cono (triángulo)	 $y(0) = 20$
2.	Despejamos X de la ecuación obtenida en la semejanza de triángulos	$\frac{20}{8} = \frac{20-y}{x}$ $x = 8 - 0.4y$
3.	Luego se modela un diferencial de volumen en base a esta semejanza para este cono de base circular	$\frac{dv}{dt} = \pi x^2 \frac{dy}{dt}$ $\frac{dv}{dt} = \pi(8-0.4y)^2 \frac{dy}{dt}$
4.	Luego se calcula el área de salida	$a = \pi(\frac{1}{6})^2$

5.	Luego se utiliza la ley de Torricelli	$$\frac{dv}{dt} = -ac\sqrt[2]{2gy}$$ $$\frac{dv}{dt} = -\frac{\pi}{36}*\frac{3}{5}\sqrt[2]{2*32*y}$$ $$\frac{dv}{dt} = -\frac{2\pi}{15}\sqrt[2]{y}$$
6.	Se Igualan las expresiones:	$$\pi(8-0.4y)^2\frac{dy}{dt} = -\frac{2\pi}{15}\sqrt[2]{y}$$
7.	Se resuelve la ecuación diferencial por variables separables	$$\frac{(8-0.4y)^2 dy}{\sqrt[2]{y}} = -\frac{2}{15}dt$$ $$\int\frac{(8-0.4y)^2 dy}{\sqrt[2]{y}} = \int -\frac{2}{15}dt$$ $$\frac{8y^{\frac{5}{2}}}{125} - \frac{64y^{\frac{3}{2}}}{15} + 128\sqrt{y} = -\frac{2}{15}t + c$$
8.	Se evalúa en la condición inicial $y(0) = 20$ para encontrar el valor de la constante c	$$\frac{8*20^{\frac{5}{2}}}{125} - \frac{64*20^{\frac{3}{2}}}{15} + 128\sqrt{20} = -\frac{2}{15}*0 + c$$ $$c = 305.3$$
9.	El tanque estará a la mitad cuando y=10	$$\frac{8*10^{\frac{5}{2}}}{125} - \frac{64*10^{\frac{3}{2}}}{15} + 128\sqrt{10} = -\frac{2}{15}t + 305.3$$ $$t = 114.10\ s$$
10.	**Concluimos que el tiempo necesario para que el tanque se vacíe hasta la mitad es 114.10 segundos**	

Tema 3 (25 puntos)
Un cuerpo de masa $\boldsymbol{m}$ cae verticalmente con una resistencia del aire directamente proporcional a la velocidad instantánea ($\boldsymbol{v}$) de dicho cuerpo. Si la dirección positiva se asume hacia abajo, determinar la ecuación que describe la velocidad del objeto como función del tiempo ($\boldsymbol{v(t)}$) si se sabe que en tiempo cero el objeto tiene una velocidad inicial de $\boldsymbol{v_0}$.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Dibujamos el diagrama de cuerpo libre del objeto	

		
2.	Si en este caso tomamos la dirección positiva dirigida hacia abajo, entonces la fuerza neta que está actuando sobre la masa está dada por	$F = F1 + F2$ $F1 = mg$ $F2 = -kv$
3.	Puesto que v está relacionada con la aceleración a mediante	$a = \frac{dv}{dt}$
4.	Entonces la segunda ley de newton será	$F = ma = m\frac{dv}{dt}$
5.	Al igualar la fuerza neta con esta forma de la segunda ley, obtenemos una ecuación diferencial para la velocidad v(t) del cuerpo al tiempo t	$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$
7.	Ahora resolvemos la ecuación diferencial	$\frac{dv}{dt} + \frac{kv}{m} = g$
	El factor integrante es: $e^{\int \frac{k}{m} dt} = e^{\frac{kt}{m}}$ Al multiplicar toda la ecuación por el factor integrante y multiplicar por dt también, aplicando la operación integral de ambos lados:	$ve^{\frac{kt}{m}} = \int ge^{\frac{kt}{m}} dt$
8.	Integramos el lado derecho	$ve^{\frac{kt}{m}} = \frac{gm}{k}e^{\frac{kt}{m}} + c$
9.	Dividimos todo entre $e^{\frac{kt}{m}}$	$v = \frac{gm}{k} + ce^{-\frac{kt}{m}}$
10.	Ahora evaluamos la condición inicial de v(0)=vo y encontramos el valor de la constante c	$vo = \frac{gm}{k} + ce^{0}$ $vo - \frac{gm}{k} = c$
11.	Nuestra ecuación quedaría	$v = \frac{gm}{k} + (vo - \frac{gm}{k})e^{-\frac{kt}{m}}$
12.	**Concluimos que la ecuación es** $v = \frac{gm}{k} + (vo - \frac{gm}{k})e^{-\frac{kt}{m}}$	

Tema 4 (25 puntos)
Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$y'''+2y''-5y'-6y=0$$

Con
$$y(0)=1$$
$$y'(0)=1$$
$$y''(0)=1$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Identificamos que es una ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes y buscamos las raíces.	$m^3+2m^2-5m-6=0$ $(m+1)(m-2)(m+3)=0$
2.	Por lo tanto, nuestras raíces son:	$m=-1$ $m=2$ $m=-3$
3.	Nuestra ecuación quedaría	$y=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}+c_3e^{-3x}$
4.	Ahora evaluamos la condición inicial de y(0)=1	$1=c_1+c_2+c_3$
5.	Ahora evaluamos la condición inicial de $y'(0)=1$ por lo que derivaremos y	$y=-c_1e^{-x}+2c_2e^{2x}-3c_3e^{-3x}$ $1=-c_1+2c_2-3c_3$
7.	Ahora evaluamos la condición inicial de $y''(0)=1$ por lo que derivaremos y’	$y=c_1e^{-x}+4c_2e^{2x}+9c_3e^{-3x}$ $1=c_1+4c_2+9c_3$
8.	Ahora con nuestras 3 ecuaciones despejamos para encontrar el valor de nuestras constantes c1, c2 y c3	$1=c_1+4c_2+9c_3$ $1=-c_1+2c_2-3c_3$ $1=c_1+c_2+c_3$ $c_1=\frac{14}{17}$ $c_2=\frac{8}{17}$ $c_3=-\frac{5}{17}$
9.	**Concluimos que la ecuación es** $y=\frac{14}{17}e^{-x}+\frac{8}{17}e^{2x}-\frac{5}{17}e^{-3x}$	