UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-114-3-M-1-00-2018_SC

CURSO:	**Matemática Intermedia 3**
SEMESTRE:	**Primero**
CÓDIGO DEL CURSO:	**114**
TIPO DE EXAMEN:	**Tercer Parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**Marzo del 2018**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Josué Rabanales**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Josué Rabanales**
COORDINADOR:	**Inga. Vera Marroquín**

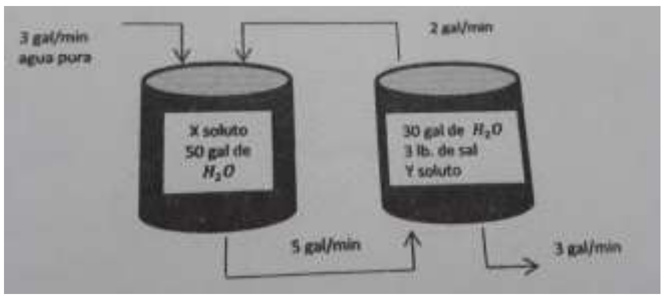
Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería
Josué Rabanales

Departamento de Matemática
Matemática Intermedia 3
I Semestre 2018

Marzo del 2018 **Tercer Examen Parcial**

Instrucciones: Deje constancia clara y legible de sus procedimientos.

Tema 1: (20 puntos) Dos tanques se encuentran interconectados como se muestra en la figura. Determine una función para cada tanque que dé la cantidad de sal a medida que transcurre el tiempo.



Tema 2: (40 puntos) Determine si la siguiente ecuación diferencial produce un conjunto de soluciones linealmente independiente.

$$y''' - 7y' + 6y = 0$$

Tema 3: (20 puntos) Resuelva la siguiente ecuación diferencial con valores iniciales:

$$y'' - 2y' + 5y = e^{x}Sin(x)$$

Tema 4: (20 puntos) Dada la siguiente solución, encontrar la ecuación diferencial de donde proviene:

$$y = c_1 + c_2 + c_3e^{-2x} + c_4e^{-x}Cos(2x) + c_5e^{-x}Sin(2x)$$

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema 1: (20 puntos) Dos tanq

No.	Explicación	Operatoria
1.	Primero vamos a plantear las ecuaciones diferenciales tomando en cuenta que la diferencia en la entrada y la salida de sal en cada tanque es igual al cambio, es decir la derivada de la cantidad de sal con respecto a el tiempo. Sea x_1 y x_2 la cantidad de sal en el primer y segundo tanque de izquierda a derecha respectivamente:	$\frac{dx_1}{dt} = 2 * \frac{x_2}{30} - 5 * \frac{x_1}{50}$ $\frac{dx_2}{dt} = -5 * \frac{x_2}{30} + 5 * \frac{x_1}{50}$
2.	Ahora resolvemos el sistema utilizando el operador diferencial:	$\left(D + \frac{1}{10}\right) x_1 - \frac{x_2}{15} = 0$ $-\frac{x_1}{10} + \left(D + \frac{1}{6}\right) x_2 = 0$
3.	Utilizamos el método de eliminación:	$\left(D + \frac{1}{10}\right) x_1 - \frac{x_2}{15} = 0$ $-\left(D + \frac{1}{10}\right) x_1 + 10\left(D + \frac{1}{10}\right)\left(D + \frac{1}{6}\right) x_2 = 0$ Sumamos ambas ecuaciones: $10\left(D^2 + \frac{4}{15} D + \frac{1}{60}\right) x_2 - \frac{x_2}{15} = 0$
4.	Resolvemos la ED después de reducirla:	$\left(10D^2 + \frac{40}{15} D + \frac{1}{10}\right) x_2 = 0$ Cuya solución al utilizar la formula cuadrática es: $D = -0.045$ $D = -0.22$ Por lo cual tenemos que la solución para x_2 es: $x_2 = c_1 e^{-0.22t} + c_2 e^{-0.045t}$
5.	Sustituimos en la segunda ecuación diferencial para obtener x_1:	$x_2 = -0.53 c_1 e^{-0.22t} + 1.2 c_2 e^{-0.045t}$

6.	Ahora aplicamos condiciones iniciales al problema:	$x_2(0) = 3\ ;\ x_1(0) = 0$ Entonces tenemos: $-0.53c_1 + 1.2c_2 = 0$ $c_1 + c_2 = 3$
7.	Utilizamos el método de eliminación para resolver el sistema formado por los coeficientes de las soluciones:	$-0.53c_1 + 1.2c_2 = 0$ $(c_1 + c_2 = 3) * 0.53$ Para lo cual obtenemos: $-0.53c_1 + 1.2c_2 = 0$ $0.53c_1 + 0.53c_2 = 1.59$ Si sumamos ambas ecuaciones: $1.73c_2 = 1.59$ Entonces tenemos las soluciones: $c_2 = 0.92$ $c_1 = 2.08$
8.	De manera que la cantidad de sal en ambos tanques está dada por:	$x_1 = -1.10e^{-0.22t} + 1.10e^{-0.045t}$ $x_2 = 2.08e^{-0.22t} + 0.92e^{-0.045t}$

Tema 2: (40 puntos) Verifique si la siguiente ecuación diferencial produce un conjunto de soluciones linealmente independiente.

$$y''' - 7y' + 6y = 0$$

a.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Primero debemos determinar las soluciones a la ecuación diferencial homogénea utilizando su ecuación auxiliar:	$m^3 - 7m + 6 = 0$ Para encontrar las raíces de la ecuación anterior podemos utilizar división sintética, con lo cual encontramos que: $(m-2)(m-1)(m+3) = 0$ Entonces: $m = 2; m = 1; m = -3$
2.	De tal manera que las soluciones obtenida son:	$y_1 = c_1 e^{2x}$ $y_2 = c_2 e^{x}$ $y_3 = c_3 e^{-3x}$
3.	Ahora que ya tenemos las soluciones utilizamos el wronskiano para verificar si son linealmente independientes:	$w = \begin{vmatrix} c_1e^{2x} & c_2e^{x} & c_3e^{-3x} \\ 2c_1e^{2x} & c_2e^{x} & -3c_3e^{-3x} \\ 4c_1e^{2x} & c_2e^{x} & 9c_3e^{-3x} \end{vmatrix}$
4.	Al resolverse el determinante anterior tenemos:	$w \neq 0$ R//Por lo cual concluimos que el anterior es un conjunto de soluciones linealmente independiente.

Tema 3: (20 puntos) Resuelva la siguiente ecuación diferencial con valores iniciales:

$$y'' - 2y' + 5y = e^x Sin(x)$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Primero encontramos la solución a la ecuación diferencial homogénea asociada utilizando su ecuación auxiliar:	$m^2 - 2m + 5 = 0$ Utilizando la fórmula cuadrática tenemos las siguientes soluciones: $m_1 = 1 + 2i$ $m_2 = 1 - 2i$
2.	Ahora escribimos la solución complementaria de la siguiente forma:	$y_c = e^x[c_1 Sin(2x) + c_2 Cos(2x)]$
3.	Ahora suponemos la solución de la ecuación	$y_p = e^x[k_1 Sin(x) + k_2 Cos(x)]$ $y'_p = e^x[(k_1 - k_2)Sin(x) + (k_1 + k_2)Cos(x)]$

	diferencial de la siguiente forma y derivamos:	$y''_p = e^x[-2k_2Sin(x) + 2k_1Cos(x)]$
4.	Al sustituit en la ecuación diferencial y simplificar obtenemos:	$e^x[-2k_2Sin(x) + 2k_1Cos(x)] - 2e^x[(k_1 - k_2)Sin(x) + (k_1 + k_2)Cos(x)] + 5e^x[k_1Sin(x) + k_2Cos(x)] = e^xSin(x)$ Al simplificar obtenemos: $3k_1Sin(x) - 3k_2Cos(x) = Sin(x)$
5.	Con el resultado anterior igualamos coeficientes a fin de que la ecuación sea verdadera y se tiene que:	$k_1 = \frac{1}{3}\,; k_2 = 0$
6.	Por último escribimos la solución completa de la ecuación diferencial	$y = c_1e^xSin(2x) + c_2e^xCos(2x) + \frac{1}{3}e^xSin(x)$

Tema 4: (20 puntos) Dada la siguiente solución, encontrar la ecuación diferencial de donde proviene:

$$y = c_1 + c_2 + c_3e^{-2x} + c_4e^{-x}Cos(2x) + c_5e^{-x}Sin(2x)$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	De la solución podemos suponer que la factorización del polinomio de la ecuación auxiliar es la siguiente:	$m^2(m+2)(m+1+2i)(m+1-2i) = 0$
2.	Desarrollamos el polinomio:	$m^2(m+2)(m^2+2m+5) = 0$
3.	Por último obtenemos:	$m^5 + 4m^4 + 9m^3 + 10m^2 = 0$
4.	De lo cual sabemos que la ecuación diferencial es:	$y^v + 4y^{iv} + 9y''' + 10y'' = 0$