UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-114-4-M-2-00-2017

CURSO:	**Matemática Intermedia 3**
SEMESTRE:	**Primero**
CÓDIGO DEL CURSO:	**114**
TIPO DE EXAMEN:	**Examen Final**
FECHA DE EXAMEN:	**10 de Mayo de 2017**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Esther Pineda**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Esther Pineda**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

Guatemala, 10 de Mayo de 2017

Examen Final

TEMA 1 (30 puntos)

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales, indicando claramente el método que utilizó para solucionarla.

a) $sen(x+y)=y'$

b) $3x+3e^{t}x^{2/3}+tx'=0$

TEMA 2 (25 puntos)

Se tiene un tanque de $10\,pies$ de largo y la cara transversal tiene la forma de un trapecio isósceles con $2\,pies$ en la base inferior sobre el eje horizontal, $4\,pies$ en la base superior y $4\,pies$ de altura, inicialmente se encontraba lleno. En el fondo del tanque se perforó un agujero circular con radio de $2\,pu\lg adas$. ¿En cuánto tiempo se vaciará totalmente el tanque?

TEMA 3 (25 puntos)

Un cuerpo que pesa $16 libras$ alarga $8/3\ pie$ un resorte. Si el cuerpo se libera inicialmente desde el reposo, desde un punto $2\,pie$ debajo de la posición de equilibrio y el movimiento posterior toma lugar en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a 0.5 veces la velocidad instantánea. Encuentre la ecuación de movimiento y describa el tipo de movimiento, si se aplica a la masa una fuerza externa igual a $f(t)=t$

TEMA 4 (20 puntos)

En un circuito en serie LRC, con $R=40\Omega$, $L=20henrios$, $C=0.025\,faradios$; en $t=0segundos$ se conecta una batería de $40voltios$. Suponga que $q(0)=2C.$, $i(0)=0A.$

Con esta información determine:

a) La ecuación de la carga de este circuito
b) Si $t\to\infty$ cual es el valor de la carga $q(t)$
c) Si $t\to\infty$ cual es el valor de la corriente $i(t)$

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

TEMA 1 (30 puntos)

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales, indicando claramente el método que utilizó para solucionarla.

a) $sen(x+y)=y'$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Primero es importante analizar el método que se utilizará. En este caso se resolverá por sustitución.	$\frac{dy}{dx}=sen(x+y)$
2.	El argumento de la función $sen(x+y)$ se sustituye por u, luego se deriva y despeja para $\frac{dy}{dx}$.	$u=x+y$ $\frac{du}{dx}=1+\frac{dy}{dx}$ $\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-1}$
3.	Realizando la sustitución en la ecuación del paso 1.	$\frac{du}{dx}=1+sen(u)$
4.	Separando variables, y multiplicando el lado derecho por $1-sen(u)$ se obtiene:	$\frac{du}{1+sen(u)}=dx$ $\frac{du}{1+sen(u)}*\frac{1-sen(u)}{1-sen(u)}=dx$ $\frac{1-sen(u)}{1-sen^2(u)}du=dx$
5.	Sustituyendo la identidad $1-sen^2(u)=cos^2u$ en la ecuación.	$\int\frac{1-sen(u)}{cos^2(u)}du=\int dx$
6.	Separando la integral del lado izquierdo. Se procede a integrar.	$\int\frac{1}{cos^2(u)}du-\int\frac{sen(u)}{cos^2(u)}du=\int dx$
9.	Para resolver la integral $-\int\frac{sen(u)}{cos^2u}$ se debe realizar una sustitución.	$z=\cos(u)$ $dz=-Sen(u)du$

10.	Recordando que $\frac{1}{cos^2(u)} = Sec^2(u)$ y sustituyendo los valores anteriores encontrados en el paso 9, se obtiene:	$\int Sec^2(u)du + \int \frac{dz}{z^2} = \int dx$
11.	Resolviendo la integral.	$\tan(u) - z^{-1} = x + C$
12.	Regresando z^{-1} a sus valores originales.	$\tan(u) - \frac{1}{\cos(u)} = x + C$
13.	Se sustituye la identidad $\frac{1}{\cos(u)} = \sec(u)$ y por último se sustituye la variable u	$\tan(u) - Sec(u) = x + C$ $\tan(x+y) - Sec(x+y) = x + C$

$$\tan(x+y) - Sec(x+y) = x + C$$

b) $3x + 3e^t\, x^{2/3} + t\, x' = 0$

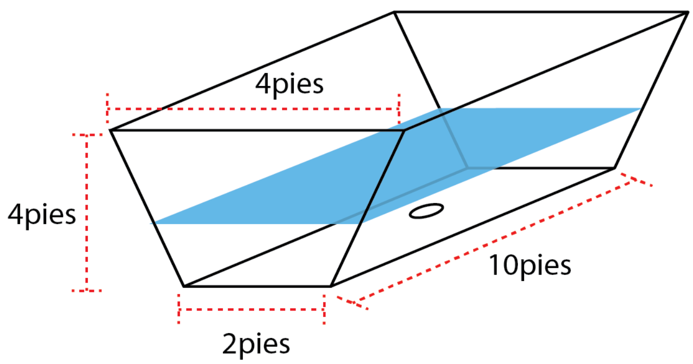
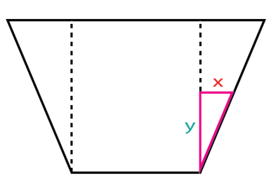
No.	Explicación	Operatoria
1.	Primero se observa la ecuación y se determina que por su forma se puede resolver utilizando el método de Bernoulli en “x”.	$3x + 3e^t\, x^{2/3} + t\, x' = 0$ $x' + P(t)x = Q(t)x^n$
2.	Se procede a colocar la ecuación en forma antes descrita y se divide dentro de t.	$\frac{tx'}{t} + \frac{3x}{t} = -\frac{3e^t x^{\frac{2}{3}}}{t}\, x' + \frac{3x}{t} = -\frac{3e^t x^{\frac{2}{3}}}{t}$
3.	Se divide la ecuación dentro de $x^{\frac{2}{3}}$.	$\frac{x'}{x^{\frac{2}{3}}} + \frac{3x}{tx^{\frac{2}{3}}} = -\frac{3e^t x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} t}$ $x' x^{-2/3} + \frac{3x^{1/3}}{t} = -\frac{3e^t}{t}$
4.	Luego se procede a encontrar V para realizar la sustitución en la ecuación. Donde n corresponde al grado del primer término.	$V = x^{1-n} = x^{1-\frac{2}{3}} = x^{1/3}$ $V = x^{1/3}$ $V' = \frac{1}{3}\, x^{-\frac{2}{3}}\, x'$ $3V' = x^{-\frac{2}{3}}\, x'$
5.	Sustituyendo los valores encontrados en el paso No.4 en la ecuación descrita en el paso No.3, se obtiene:	$x' x^{-2/3} + \frac{3x^{1/3}}{t} = -\frac{3e^t}{t}$ $3V' + \frac{3V}{t} = -\frac{3e^t}{t}$
6.	Se procede a simplificar dividiendo la ecuación dentro de 3.	$V' + \frac{V}{t} = -\frac{e^t}{t}$
7.	La ecuación obtenida en el paso No.6 es una ecuación lineal en “V”.	$V' + P(t)V = Q(t)$

8.	Por lo tanto se procede a encontrar el factor de integración:	$F.I. = e^{\int \frac{dt}{t}} = e^{lnt} = t$
9.	Se procede a aplicar el factor integrante en la ecuación.	$tV = -\int \frac{e^t t}{t} dt$
10.	Se integra la ecuación y se despeja V.	$tV = -\int e^t\, dt$ $tV = -e^t + C$ $V = \frac{-e^t + C}{t}$
11.	Luego se sustituye V en la ecuación.	$x^{1/3} = \frac{-e^t + C}{t}$
12.	Por lo tanto la ecuación quedaría como:	$x = \left(\frac{-e^t + C}{t}\right)^3$

R//. $x = \left(\frac{-e^t+C}{t}\right)^3$

TEMA 2 (30 PUNTOS)

Se tiene un tanque de $10\,pies$ de largo y la cara transversal tiene la forma de un trapecio isósceles con $2\,pies$ en la base inferior sobre el eje horizontal, $4\,pies$ en la base superior y $4\,pies$ de altura, inicialmente se encontraba lleno. En el fondo del tanque se perforó un agujero circular con radio de $2\,pu\lg adas$. ¿En cuánto tiempo se vaciará totalmente el tanque?

No.	Explicación	Operatoria
1.		$A_{espejo}\left(\frac{dy}{dt}\right) = -A_{agujero}\sqrt{2\,g\,y}$
2.	Luego de dibujar el trapecio se procede a encontrar el área del agujero. Como las dimensiones son dadas en pulgas es necesario convertirlas a pies.	$A_{agujero} = \pi r^2$ $A_{agujero} = \pi\left(2'' * \frac{1\,pie}{12''}\right)$ $A_{agujero} = \frac{\pi}{36} pies$
3.	Para encontrar el área del espejo es necesario hacer una semejanza de triángulos con el fin de colocar el área en función de la altura.	$A_{espejo} = b * h$ $A_{espejo} = (10) * (2 + 2x)$
4.	 Al realizar la semejanza de triángulos se obtiene una ecuación que será substituida en la ecuación del paso 3.	$\frac{1}{x} = \frac{4}{y}$ $x = \frac{y}{4}$
5.	Así la ecuación del área del espejo está dada por:	$A_{espejo} = (10) * \left(2 + 2\left(\frac{y}{4}\right)\right)$
7.	Simplificando la ecuación anterior se obtiene el área del espejo.	$A_{espejo} = 20 + 5y$

8.	Sustituyendo los valores en la ecuación descrita en el paso 1 se obtiene: *Recordando que la gravedad está dada por 32 $pies/seg^2$.	$(20+5y)\left(\frac{dy}{dt}\right) = -\frac{\pi}{36}\sqrt{2\,(32)\,y}$
9.	Separando las variables se obtiene la siguiente ecuación.	$(20+5y)dy = -\frac{8\pi}{36}\sqrt{y}\,dt$ $\frac{(20+5y)}{\sqrt{y}}dy = -\frac{8\pi}{36}\,dt$ $[20y^{-1/2}+5y^{1/2}]dy = -\frac{2\pi}{9}\,dt$
10.	Integrando ambos lados dela ecuación:	$40y^{1/2}+\frac{10}{3}y^{3/2} = -\frac{2\pi}{9}t + C$
11.	Planteando las condiciones iniciales, se tiene que el tiempo cero el tanque está lleno totalmente, por lo tanto la altura es 4. Obteniendo así el valor de la constante de integración.	$y = 4 \quad , \quad t = 0$ $40(4)^{1/2}+\frac{10}{3}(4)^{3/2} = C$ $C = \frac{320}{3}$
12.	Sustituyendo en la ecuación se obtiene:	$40y^{1/2}+\frac{10}{3}y^{3/2} = -\frac{2\pi}{9}t + \frac{320}{3}$
13.	Por último, el tiempo para vaciar completamente el tanque esta dado cuando la altura es 0.	$40(0)^{1/2}+\frac{10}{3}(0)^{3/2}$ $= -\frac{2\pi}{9}t + \frac{320}{3}$ $0 = -\frac{2\pi}{9}t + \frac{320}{3}$ $t = 152.78\ segundos$

El tiempo en que se vaciará el tanque es de 152.78 $segundos$

Tema 3 (30 puntos)

Un cuerpo que pesa $16 libras$ alarga $8/3\ pie$ un resorte. Si el cuerpo se libera inicialmente desde el reposo, desde un punto $2pie$ debajo de la posición de equilibrio y el movimiento posterior toma lugar en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a 0.5 veces la velocidad instantánea. Encuentre la ecuación de movimiento y describa el tipo de movimiento, si se aplica a la masa una fuerza externa igual a $f(t) = t$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Ordenando los datos que se han dado.	$F = \omega = 16lb$, $x = 8/3Pies$, $\beta = 1/2$; $\omega = mg$, $\frac{\omega}{g} = m$, $m = \frac{16lb}{32\ pie/s^2} = \frac{1}{2}\ slug$ $F = kx$, $k = \frac{F}{x} = \frac{16lb}{8/3pie} = 6$ $x(0) = -2pie$
2.	Primero se usa el modelo de la ecuación, para sustituir los datos.	$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = 0$
3.	Haciendo sustitución de los datos dados y simplificando la ecuación se obtiene:	$\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{dx}{dt} + 6x = 0$ $\frac{1}{2}x'' + \frac{1}{2}x' + 6x = 0$ $x'' + x' + 12x = 0$
4.	Resolviendo la ecuación, se encuentran las raíces. Se puede observar por los coeficientes que el movimiento es sub amortiguado.	$r^2 + r + 12 = 0$ $m_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{47}}{2}i$ $m_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{47}}{2}i$
5.	Planteando la solución	$x(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(C_1 Cos\left[\frac{\sqrt{47}}{2}t\right] + C_2\ Sin\left[\frac{\sqrt{47}}{2}t\right]\right)$

6.	Si se aplica una fuerza externa $f(t) = t$ el movimiento se vuelve un Movimiento Forzado Amortiguado.	$\frac{1}{2}x'' + \frac{1}{2}x' + 6x = t$ $x'' + x' + 12x = 2t$
7.	Encontrando la ecuación particular.	$x_p = A + Bt$ $x'_p = B$ $x''_p = 0$ $x''_p + x'_p + 12x = 2t$ $0 + B + 12A + 12Bt = 2t$
8.	Igualando el grado de los coeficientes y encontrando el valor de las variables.	$12B = 2$ $\boxed{B = \frac{1}{6}}$ $12A + B = 0$ $A = -\frac{B}{12}$ $\boxed{A = -\frac{1}{72}}$
9.	Sustituyendo las variables en la ecuación particular. Por último la solución final está dada por la suma de la solución complementaria y la solución particular.	$x_p = A + Bt$ $x_p = -\frac{1}{72} + \frac{1}{6}t$ $x(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(C_1 Cos\left[\frac{\sqrt{47}}{2}t\right] + C_2\,Sin\left[\frac{\sqrt{47}}{2}t\right]\right) - \frac{1}{72} + \frac{1}{6}t$

1) La ecuación de movimiento está dada por:

$$x(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(C_1 Cos\left[\frac{\sqrt{47}}{2}t\right] + C_2\,Sin\left[\frac{\sqrt{47}}{2}t\right]\right)$$

2) La ecuación de movimiento forzado amortiguado

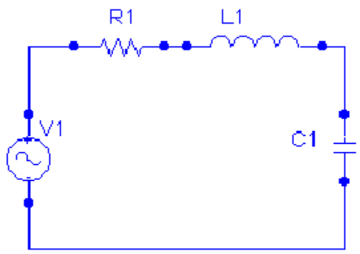
$$x(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(C_1 Cos\left[\frac{\sqrt{47}}{2}t\right] + C_2\,Sin\left[\frac{\sqrt{47}}{2}t\right]\right) - \frac{1}{72} + \frac{1}{6}t$$

Tema 4 (25 puntos)

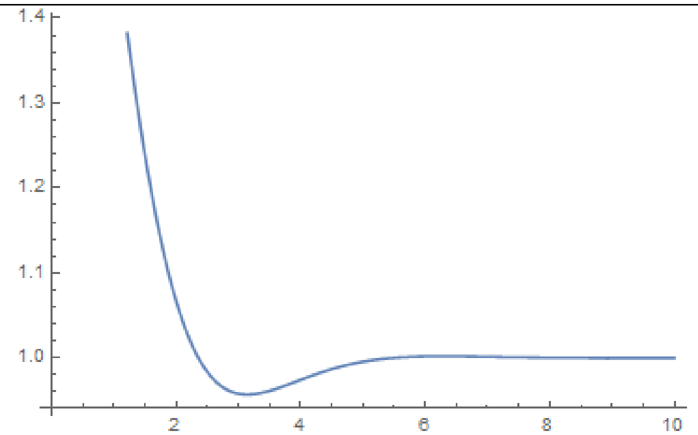
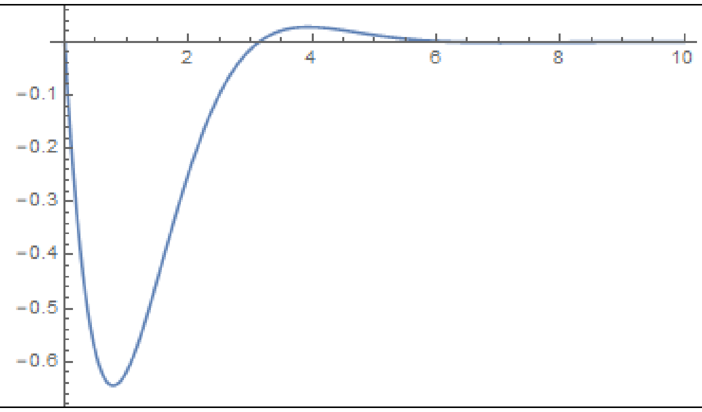
En un circuito en serie LRC, con $R = 40\Omega$, $L = 20henrios$, $C = 0.025\,faradios$; en $t = 0segundos$ se conecta una batería de $40voltios$. Suponga que $q(0) = 2C.$, $i(0) = 0A.$

Con esta información determine:

a) La ecuación de la carga de este circuito
b) Si $t \to \infty$ cual es el valor de la carga $q(t)$
c) Si $t \to \infty$ cual es el valor de la corriente $i(t)$

No.	Explicación	Operatoria
1.		$R = 40\ \Omega$ $L = 20h$ $C = 0.025f$ $E(t) = 40v$
2.	Ecuación diferencial general para un circuito. Donde q representa la carga.	$L\,q'' + Rq' + \frac{1}{c}q = E(t)$
3.	Sustituyendo los valores en la ecuación y simplificando.	$20\,q'' + 40q' + \frac{1}{0.025}q = 40$ $20\,q'' + 40q' + 40q = 40$ $q'' + 2q' + 2q = 2$
4.	Planteando una solución complementaria y encontrando las raíces de la ecuación.	$q'' + 2q' + 2q = 2$ $m^2 + 2m + 2 = 0$ $m = -1\ \pm i$
5.	Usando las raíces para escribir la ecuación complementaria.	$q_c = e^{-t}(C_1\,Cos(t) + C_2Sen(t))$
	Encontrando una solución Particular.	$q_p = A$ $q'_p = 0$ $q''_p = 0$

6.	Sustituyendo en la ecuación para encontrar la variable A. Se obtiene que la solución particular es igual a 1.	$q'' + 2q' + 2q = 2$ $0 + 0 + 2A = 2$ $A = 1 = q_p$
7.	Planteando la solución general que es la suma se la solución complementaria y la solución particular.	$q(t) = e^{-t}\big(C_1\, Cos(t) + C_2 Sen(t)\big) + 1$
8.	Para encontrar las constantes se sabe que al tiempo cero la carga es de 2 C.	$q(0) = 2\ C.$ $q(0) = e^{0}\big(C_1\, Cos(0) + C_2 Sen(0)\big) + 1$ $2 = C_1 + 1$ $\boxed{C_1 = 1}$
9.	Derivando la ecuación en el paso 7 se encuentra la corriente. $\dfrac{dq}{dt} = i(t)$	$q(t) = e^{-t}\big(C_1\, Cos(t) + C_2 Sen(t)\big) + 1$ $\dfrac{dq}{dt} = e^{-t}\big(-C_1 Sen(t) + C_2\, Cos(t)\big) - e^{-t}\big(C_1\, Cos(t) + C_2 Sen(t)\big)$
10.	Para encontrar la constante dos se sabe que en el tiempo cero la corriente es igual a cero.	$i(0) = 0$ $i(0) = e^{0}\big(-C_1 Sen(0) + C_2\, Cos(0)\big) - e^{0}\big(C_1\, Cos(0) + C_2 Sen(0)\big)$ $0 = C_2 - C_1$ $\boxed{C_2 = 1}$
11.	Al sustituir las constantes se encuentra la ecuación de carga:	$q(t) = e^{-t}\big(\, Cos(t) + Sen(t)\big) + 1$
12.	Así mismo la ecuación de corriente está dada por:	$i(t) = e^{-t}\big(-Sen(t) + Cos(t)\big) - e^{-t}\big(\, Cos(t) + Sen(t)\big)$
13.	Calculando el valor de t para la ecuación de carga cuando $t \to \infty$	$\lim_{t\to\infty} e^{-t}\big(\, Cos(t) + Sen(t)\big) + 1 = 1$

14.	Al graficar la ecuación de carga se observa claramente como tiende a uno cuando el tiempo es muy largo.	
15.	Calculando el valor de t para la ecuación de corriente cuando $t \to \infty$	$\lim_{t\to\infty} e^{-t}\big(-Sen(t) + Cos(t)\big) - e^{-t}\big(\,Cos(t) + Sen(t)\big) = 0$
16.	Al graficar la ecuación de corriente se observa claramente como tiende a cero cuando el tiempo es muy largo.	

a) $q = e^{-t}\big(\,Cos(t) + Sen(t)\big) + 1$
b) Cuando $t \to \infty$ el valor de la carga es igual a uno
c) Cuando $t \to \infty$ el valor de la corriente es igual a cero