UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-114-4-V-2-00-2017

CURSO:	**Matemática Intermedia 3**
SEMESTRE:	**Segundo**
CÓDIGO DEL CURSO:	**114**
TIPO DE EXAMEN:	**Examen Final**
FECHA DE EXAMEN:	**8 de noviembre de 2017**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Sedwin Ramos**
REVISÓ EL EXAMEN:	**Ing. Mario López**

Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemática

EXAMEN FINAL DE MATEMÁTICA INTERMEDIA 3
JORNADA VESPERTINA 8 DE NOVIEMBRE DE 2017

Tema No. 1 (20 puntos)

Un tanque tiene la forma que se obtiene al hacer girar la curva $x^2 = by$ alrededor del eje $"y"$. La profundidad del agua es de 4 pies a mediodía, cuando se retira un tapón circular del fondo. A la 1:00 p.m. la profundidad del agua es de 1 pie. ¿A qué hora estará vacío el tanque?

Tema No. 2 (20 puntos)

Resuelva la ecuación dada por variación de parámetros: $$y'' + 6y' + 9y = \frac{e^{-3x}}{x^2 + 1}$$

Tema No. 3 (20 puntos)

Considere un estanque con un volumen de 8000 millones de pies^3 y una concentración inicial de contaminantes de 0.25%. Hay un ingreso diario de 500 millones de pies^3 de agua con una concentración de contaminantes de 0.05% y un derrame diario de igual cantidad de agua bien mezclada en el estanque. ¿Cuánto tiempo aproximadamente pasará para que la concentración de contaminantes en el estanque se reduzca al 0.20%?

Tema No. 4 (20 puntos)

A las 1:00 p.m. un termómetro que marca 70°F, es trasladado al exterior donde el aire tiene una temperatura de -10°F. A la 1:02 la temperatura del termómetro es de 26°F. A la 1:05 p.m. el termómetro se lleva nuevamente adentro donde el aire está a 70°F. ¿Cuál es la lectura del termómetro a las 1:14 p.m.?

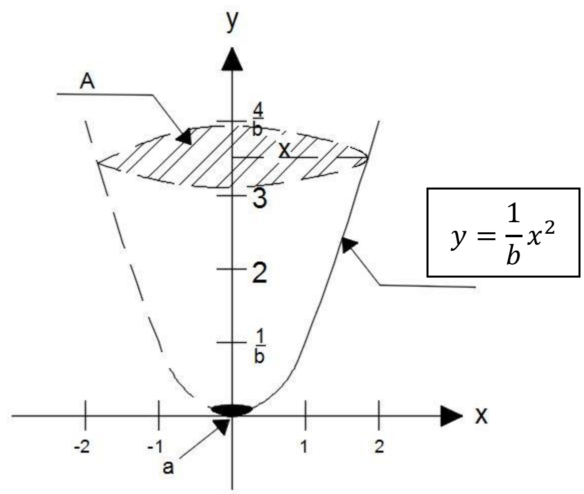
Tema No. 5 (20 puntos)

Un sistema masa – resorte - amortiguador está colocado verticalmente y tiene constantes de masa $m = \frac{1}{8}kg$, y $k = 2$ N/m. El movimiento se lleva a cabo en un medio que ofrece una fuerza de amortiguación igual a la velocidad del sistema. Inicialmente la masa es colocada 1m debajo de la posición de equilibrio, donde se le imprime una velocidad de 8 m/s hacia arriba. Determine las ecuaciones de posición y velocidad de la masa, si sobre el sistema se aplica una fuerza externa $f(t) = 12.5\, sen 2t$.

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

<u>Tema No. 1</u> (20 puntos)

Un tanque tiene la forma que se obtiene al hacer girar la curva $x^2 = by$ alrededor del eje "y". La profundidad del agua es de 4 pies a mediodía, cuando se retira un tapón circular del fondo. A la 1:00 p.m. la profundidad del agua es de 1 pie. ¿A qué hora estará vacío el tanque?

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se plantea la ecuación diferencial de la Ley de Torricelli para resolver el problema	 $$\frac{dh}{dt} = -\frac{ca}{A}\sqrt{2gh}$$ Donde: $a = Área\ del\ agujero$ $A = Área\ del\ espejo\ de\ agua$ Pero: $$A = \pi x^2$$
2.	Sustituyendo y simplificando	$$\frac{dy}{dt} = -\frac{ca}{\pi x^2}\sqrt{2(32)y}$$ $$\frac{dy}{dt} = -\frac{8cay^{\frac{1}{2}}}{\pi x^2}$$ $Se\ sabe\ que$: $$x^2 = by$$

		$Entonces$: $$\frac{dy}{dt}=-\frac{8cay^{\frac{1}{2}}}{\pi(by)}$$ $$\frac{dy}{dt}=-\frac{8ca}{\pi by^{\frac{1}{2}}}$$
3.	Resolviendo por el método de variables separables.	$$y^{\frac{1}{2}}\,dy=-\left(\frac{8ca}{\pi b}\right)dt$$ $$\int y^{\frac{1}{2}}\,dy=-\left(\frac{8ca}{\pi b}\right)\int\,dt$$ $$\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=-\frac{8ca}{\pi b}t+C_1$$ $$y^{\frac{3}{2}}=-\frac{(3)(8ca)}{(2)(\pi b)}t+C_2$$ $$y^{\frac{3}{2}}=-\frac{12ca}{\pi b}t+C_2$$ Despejando "y" para obtener una solución explícita: $$y=\left[-\frac{12ca}{\pi b}t+C_2\right]^{\frac{2}{3}}$$
4.	Aplicando condiciones iniciales	$$Para\ t=0\,;y=4$$ $$4=\left[-\left(\frac{12ca}{\pi b}\right)(0)+C_2\right]^{\frac{2}{3}}$$ $$C_2=(4)^{\frac{3}{2}}=\sqrt{4^3}=8$$ Entonces: $$y=\left[-\frac{12ca}{\pi b}t+8\right]^{\frac{2}{3}}$$
5.	Despejando "b" para obtener una solución explícita.	$$Para\ y=1\,;t=\ 1$$ $$1=\left[-\frac{12ca}{\pi b}(1)+8\right]^{\frac{2}{3}}$$

		$1 = -\frac{12ca}{\pi b} + 8$ $\frac{12ca}{\pi b} = 7$ $b = \frac{12ca}{7\pi}$
6.	Sustituyendo y simplificando.	$y = \left[-\frac{12ca}{\pi\left(\frac{12ca}{7\pi}\right)}t + 8\right]^{\frac{2}{3}}$ $y = \left[-\frac{(12ca)(7)}{(12ca)}t + 8\right]^{\frac{2}{3}}$ $y = [-7t + 8]^{\frac{2}{3}}$
7.	Aplicando condiciones iniciales para determinar el tiempo que tarda en vaciarse el tanque.	$Para\ y = 0\ ; t = ?$ $0 = [-7t + 8]^{\frac{2}{3}}$ $0 = -7t + 8$ $t = \frac{8}{7}\ hrs\ \approx 1.142857143\ hrs$ $t = 1h\ 8'\ 34"$

R./ El tanque se vacía a la 1:08:34 pm

<u>Tema No. 2</u> (20 puntos)

Resuelva la ecuación dada por variación de parámetros: $y'' + 6y' + 9y = \dfrac{e^{-3x}}{x^2+1}$

No.	Explicación	Operatoria
1	Se resuelve la parte homogénea de la ecuación, es decir, la parte complementaria:	$$y'' + 6y' + 9y = \frac{e^{-3x}}{x^2+1}$$ y_c: $$m^2 + 6m + 9 = 0$$ $$(m+3)^2 = 0$$ $$m = -3\,, multiplicidad\ 2$$ Se tiene que: $$y_c = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$$
2	Se determina el Wronskiano para poder resolver la ecuación diferencial mediante el método de variación de parámetros.	Se sabe que la solución particular se conforma de la siguiente manera: $$y_p = y_1 u_1 + y_2 u_2$$ Para resolver se tiene que: $$y_1 u'_1 + y_2 u'_2 = 0$$ $$y_1' u'_1 + y_2' u'_2 = f(x)$$ Donde: $$u'_1 = \frac{w_1}{W}$$ $$u'_2 = \frac{w_2}{W}$$ $$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}$$ $$w_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y'_2 \end{vmatrix}$$ $$w_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & f(x) \end{vmatrix}$$

		Identificando se tiene que: $$y_1 = e^{-3x}$$ $$y_2 = e^{-3x}$$ $$f(x) = \frac{e^{-3x}}{x^2+1}$$
3	Sustituyendo y operando :	Derivando se tiene: $$y'_1 = 2e^{2x}$$ $$y'_2 = -2e^{-2x}$$ Se obtienen los determinantes: $$W = \begin{vmatrix} e^{-3x} & xe^{-3x} \\ -3e^{-3x} & e^{-3x} - 3xe^{-3x} \end{vmatrix}$$ $$W = e^{-6x} - 3xe^{-6x} - (-3xe^{-6x}) = e^{-6x}$$ $$w_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^{-3x} \\ \frac{e^{-3x}}{x^2+1} & e^{-3x} - 3xe^{-3x} \end{vmatrix} = -\frac{xe^{-6x}}{x^2+1}$$ $$w_2 = \begin{vmatrix} e^{-3x} & 0 \\ -3e^{-3x} & \frac{e^{-3x}}{x^2+1} \end{vmatrix} = \frac{e^{-6x}}{x^2+1}$$
4	Se opera para obtener los parámetros que resuelvan la ecuación diferencial.	$$u'_1 = \frac{w_1}{W} = \frac{-\frac{xe^{-6x}}{x^2+1}}{\frac{e^{-6x}}{1}} = -\frac{xe^{-6x}}{(x^2+1)(e^{-6x})}$$ $$u'_1 = -\frac{x}{x^2+1}$$ $$u'_2 = \frac{w_2}{W} = \frac{\frac{e^{-6x}}{x^2+1}}{\frac{e^{-6x}}{1}} = \frac{e^{-6x}}{(x^2+1)(e^{-6x})}$$ $$u'_2 = \frac{1}{x^2+1}$$

		Integrando u'_1 se obtiene: $$u_1 = -\int \frac{x}{x^2+1}dx$$ Sea: $$w = x^2+1$$ $$dw = 2x\,dx$$ $$dx = \frac{dw}{2x}$$ Sustituyendo se obtiene: $$u_1 = -\int \frac{x}{w} * \frac{dw}{2x} = -\frac{1}{2}\int \frac{dw}{w}$$ $$u_1 = -\frac{1}{2}ln\lvert w\rvert = -\frac{1}{2}ln\lvert x^2+1\rvert$$ Integrando u'_2 se obtiene: $$u_2 = \int \frac{1}{x^2+1}dx = arctg(x)$$
5	Entonces se obtiene la solución particular.	$$y_p = y_1u_1 + y_2u_2$$ $$y_p = (e^{-3x})\left(-\frac{1}{2}ln\lvert x^2+1\rvert\right) + (xe^{-3x})\big(arctg(x)\big)$$ $$y_p = -\frac{1}{2}e^{-3x}ln\lvert x^2+1\rvert + xe^{-3x}arctg(x)$$
6	Se tiene la solución de la ecuación diferencial.	$$y = y_c + y_p$$ $$y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x} - \frac{1}{2}e^{-3x}ln\lvert x^2+1\rvert + xe^{-3x}arctg(x)$$

R//

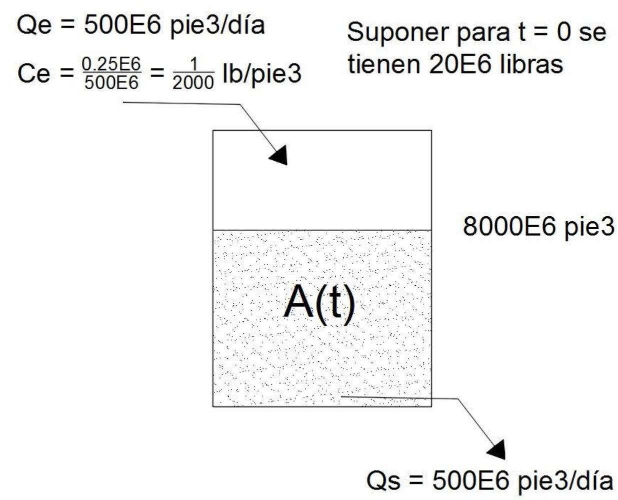
La solución de la ecuación diferencial mediante el método de variación de parámetros es:

$$y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x} - \frac{1}{2}e^{-3x}ln\lvert x^2+1\rvert + xe^{-3x}arctg(x)$$

Universidad de San Carlos de Guatemala **Departamento de Matemática**
Facultad de Ingeniería **Matemática Intermedia 3**

<u>Tema No. 3</u> (20 puntos)

Considere un estanque con un volumen de 8000 millones de pies^3 y una concentración inicial de contaminantes de 0.25%. Hay un ingreso diario de 500 millones de pies^3 de agua con una concentración de contaminantes de 0.05% y un derrame diario de igual cantidad de agua bien mezclada en el estanque. ¿Cuánto tiempo aproximadamente pasará para que la concentración de contaminantes en el estanque se reduzca al 0.20%?

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se plantea la ecuación diferencial y se simplifica	 $A(t) = Cantidad\ de\ contaminantes\ en\ el\ tiempo, en\ libras$ $\frac{dA}{dt} = \binom{Razón\ de\ entrada}{de\ contaminantes} - \binom{Razón\ de\ salida}{de\ contaminantes}$ $\frac{dA}{dt} = R_{ent} - R_{sal}$ $\frac{dA}{dt} = Q_e C_e - Q_s C_s$ $\frac{dA}{dt} = (500E6)\left(\frac{1}{2000}\right) - (500E6)\left(\frac{A}{8000E6 + (5-5)t}\right)$ $\frac{dA}{dt} = 25E4 - \frac{1}{16}A$ Se obtiene la Ecuación Diferencial Lineal: $\frac{dA}{dt} + \frac{1}{16}A = 25E4$
2.	Determinando la solución complementaria.	Ecuación auxiliar A_c: $m + \frac{1}{16} = 0$ $m = -\frac{1}{16}$ $A_c = C_1 e^{\frac{-1}{16}t}$

3.	Determinando la solución particular.	$A_p = B$ $A'_p = 0$ Sustituyendo se obtiene: $0 + \frac{1}{16}B = 25E4$ $B = 4E6$
4.	Determinando la ecuación diferencial que resuelve el problema.	$A(t) = A_c + A_p$ $A(t) = C_1 e^{\frac{-1}{16}t} + 4E6$
5.	Aplicando condiciones iniciales en: $t = 0\ minutos$ $A(0) = 20E6\ libras$	$A(0) = C_1 e^{\frac{-1}{16}(0)} + 4E6$ $20E6 = C_1 + 4E6$ $C_1 = 20E6 - 4E6 = 16E6$ $Entonces$: $A(t) = (16E6)e^{\frac{-1}{16}t} + 4E6$
6.	Aplicando condiciones iniciales para: $A = 16E6$ y t=?	$16E6 = (16E6)e^{\frac{-1}{16}t} + 4E6$ $\frac{3}{4} = e^{\frac{-1}{16}t}$ Aplicamos logaritmo a ambos lado de la ecuación y despejamos “t”: $ln\left\|\frac{3}{4}\right\| = \frac{-1}{16}t$ $t = -16\ ln\left\|\frac{3}{4}\right\|\ días$ $t = 4.6\ días$

R//

Para que la concentración de contaminantes en el estanque se reduzca al 0.20%, debe pasar aproximadamente 4.6 días.

Tema No. 4 (20 puntos)

A las 1:00 p.m. un termómetro que marca 70°F, es trasladado al exterior donde el aire tiene una temperatura de -10°F. A la 1:02 la temperatura del termómetro es de 26°F. A la 1:05 p.m. el termómetro se lleva nuevamente adentro donde el aire está a 70°F. ¿Cuál es la lectura del termómetro a las 1:14 p.m.?

No.	Explicación	Operatoria
1	Se plantea la ecuación diferencial que modela el problema de temperaturas	Se tiene que: $$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$ Resolviendo por variación de parámetros: $$\frac{dT}{(T - T_m)} = kdt$$ $$\int \frac{dT}{(T - T_m)} = \int kdt$$ Sea: $$w = T - T_m$$ $$dw = dT$$ Entonces: $$\int \frac{1}{w} dw = \int kdt$$ $$ln\lvert w\rvert = kt + C_1$$ $$ln\lvert T - T_m\rvert = kt + C_1$$ $$T - T_m = e^{kt+C_1}$$ $$T = T_m + C_2 e^{kt}$$ $$T = T_m + Ce^{kt}$$
2	Se resuelve la ecuación diferencial por medio de las condiciones iniciales:	Caso 1: $$Para\ t = 0\ ;\ T_1 = 70°F\ ;\ \ T_m = -10°F$$ Sustituyendo valores: $$70 = -10 + C_1 e^{k(0)}$$ Despejando C_1 , se obtiene: $$C_1 = 70 + 10 = 80$$

		Entonces: $$T_1 = -10 + 80e^{k_1 t}$$
3	Resolviendo con la segunda condición inicial para determinar el valor de k_1:	$$Para\ t = 2\ ;\ T_1 = 26°F$$ $$26 = -10 + 80e^{k_1(2)}$$ $$36 = 80e^{2k_1}$$ $$\frac{9}{20} = e^{2k_1}$$ Aplicamos logaritmo natural a ambos lados de la ecuación: $$ln\left\|\frac{9}{20}\right\| = 2k_1$$ $$k_1 = \frac{1}{2}ln\left\|\frac{9}{20}\right\| \approx -0.3992538481$$ Entonces: $$T_1 = -10 + 80e^{\frac{1}{2}ln\left\|\frac{9}{20}\right\|t}$$ Valuando para $t = 5$ $$T_1(5) = -10 + 80e^{\frac{1}{2}ln\left\|\frac{9}{20}\right\|(5)}$$ $$T_1(5) = 0.8672903706\ °F$$
4	Se resuelve la ecuación diferencial por medio de las condiciones iniciales:	Caso 2: $$Para\ t = 0\ ;\ T_2 = 0.8672903706°F\ ;\ \ T_m = 70°F$$ Sustituyendo valores: $$0.8672903706 = 70 + C_2e^{k(0)}$$ Despejando C_2 , se obtiene: $$C_2 = -70 + 0.8672903706$$ $$C_2 = -69.13270963$$

		Entonces: $$T_2 = 70 - 69.13270963e^{k_2 t}$$ A la 1:14 se tiene: $$T_2(9) = 70 - 69.13270963e^{(9)k_2}$$

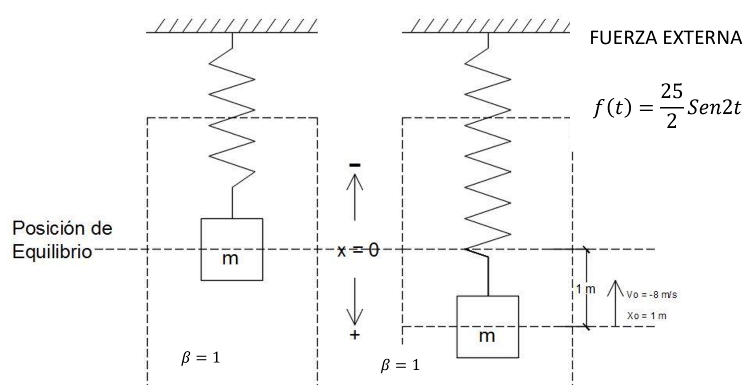
R//

La lectura del termómetro a las 1:14 p.m. es:

$$T_2(9) = 70 - 69.13270963e^{(9)k_2}$$

<u>Tema No. 5</u> (20 puntos)

Un sistema masa – resorte - amortiguador está colocado verticalmente y tiene constantes de masa $m = \frac{1}{8}\,kg$, y $k = 2$ N/m. El movimiento se lleva a cabo en un medio que ofrece una fuerza de amortiguación igual a la velocidad del sistema. Inicialmente la masa es colocada 1m debajo de la posición de equilibrio, donde se le imprime una velocidad de 8 m/s hacia arriba. Determine las ecuaciones de posición y velocidad de la masa, si sobre el sistema se aplica una fuerza externa $f(t) = 12.5\,sen2t$.

No.	**Explicación**	**Operatoria**
1.	Se plantea la ecuación para el problema de movimiento forzado amortiguado.	 La ecuación diferencial que resuelve el problema es: $$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta\frac{dx}{dt} + f(t)$$ Multiplicando todo por ocho ambos lados de la ecuación, se tiene:

		$\left[\left(\frac{1}{8}\right)\frac{d^2x}{dt^2} = -(2)x - \frac{dx}{dt} + \frac{25}{2}Sen2t\right]*(8)$ $\frac{d^2x}{dt^2} = -16x - 8\frac{dx}{dt} + 100Sen2t$ $\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 16x = 100Sen2t$
2.	Resolviendo parte homogénea de la ecuación.	$m^2 + 8m + 16 = 0$ $m = -4\,, con\ multiplicidad\ 2$ $x_c(t) = C_1e^{-4t} + C_2te^{-4t}$
3.	Resolviendo parte No homogénea de la ecuación.	$f(t) = 100Sen2t$ $x_p(t) = ACos2t + BSin2t$ $x'_p(t) = -2ASin2t + 2BCos2t$ $x"_p(t) = -4ACos2t - 4BSin2t$
4.	Se obtiene la solución particular mediante la sustitución correspondiente en la ecuación diferencial y operando.	$x"_p + 8x'_p + 16x_p = 100Sen2t$ $(-4ACos2t - 4BSin2t) + 8(-2ASin2t + 2BCos2t) + 16(ACos2t + BSin2t) = 100Sen2t$ $-4ACos2t - 4BSin2t - 16ASin2t + 16BCos2t + 16ACos2t + 16BSin2t = 100Sen2t$ $Cos2t(12A + 16B) + Sin2t(12B - 16A) = 100Sen2t$ $Resolviendo\ para\ Cos2t$: $12A + 16B = 0$ $A = -\frac{4}{3}B$ Ec.(1) $Resolviendo\ para\ Sin2t$: $12B - 16A = 100$ $12B - 100 = 16A$ $A = \frac{3}{4}B - \frac{25}{4}$ Ec.(2) $Igualando\ Ec.1\ y\ Ec.2$: $-\frac{4}{3}B = \frac{3}{4}B - \frac{25}{4}$ $\frac{25}{12}B = \frac{25}{4}$ $B = 3$ De Ec. 1 se tiene:

		$A = -\frac{4}{3}B = -\frac{4}{3}(3) = -4$ $Entonces$: $x_p(t) = -4Cos2t + 3Sin2t$
5.	Se tiene como solución general.	$x(t) = x_c(t) + x_p(t)$ $x(t) = C_1e^{-4t} + C_2te^{-4t} - 4Cos2t + 3Sin2t$
6.	Aplicando condiciones iniciales, para determinar el valor de los coeficientes.	$Primera\ condición\ inicial$: $x(0) = 1$ $x(0) = C_1e^{-4(0)} + C_2(0)e^{-4(0)} - 4Cos2(0) + 3Sin2(0)$ $1 = C_1 - 4$ $C_1 = 5$ $Segunda\ condición\ inicial$: $x'(0) = -8\ m/s$ $x(t) = 5e^{-4t} + C_2te^{-4t} - 4Cos2t + 3Sin2t$ $x'(t) = -20e^{-4t} + C_2[e^{-4t} - 4te^{-4t}] + 8Sin2t + 6Cos2t$ $x'(0) = -20e^{-4(0)} + C_2\left[e^{-4(0)} - 4(0)e^{-4(0)}\right] + 8Sin2(0) + 6Cos2(0)$ $-8 = -20 + C_2[1] + 6$ $C_2 = 6$

7.	Planteando las ecuaciones de posición y velocidad de la masa.	$x(t) = 5e^{-4t} + 6te^{-4t} - 4Cos2t + 3Sin2t$ $x'(t) = -20e^{-4t} + 6[e^{-4t} - 4te^{-4t}] + 8Sin2t + 6Cos2t$ $x'(t) = -16e^{-4t} - 24te^{-4t} + 8Sin2t + 6Cos2t$

R//

Las ecuaciones de posición y velocidad de la masa, si se aplica a la masa una fuerza externa igual a $f(t) = 12.5Sen2t$ son:

- Ecuación de posición:

$$x(t) = 5e^{-4t} + 6te^{-4t} - 4Cos2t + 3Sin2t$$

- Ecuación de velocidad:

$$x'(t) = -16e^{-4t} - 24te^{-4t} + 8Sin2t + 6Cos2t$$