UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-114-5-V-2-00-2017

CURSO:	**Matemática Intermedia 3**
SEMESTRE:	**Segundo**
CÓDIGO DEL CURSO:	**114**
TIPO DE EXAMEN:	**Primera retrasada**
FECHA DE EXAMEN:	**Segundo semestre 2017**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Hilda Nelly Tórtola Morales**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Hilda Nelly Tórtola Morales**
COORDINADOR:	**Ing. Vera Marroquín**

PRIMERA RETRASADA MATEMÁTICA INTERMEDIA III

JORNADA VESPERTINA

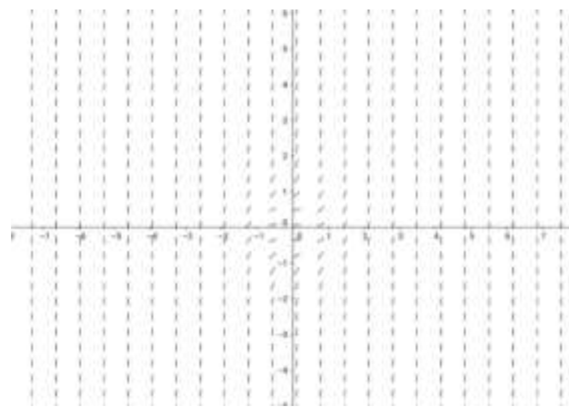
22 DE NOVIEMBRE 2017

TEMA 1 20 pts.	Trace algunas curvas solución para la siguiente ecuación diferencial utilizando el Método de Campos Direccionales: $$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$
TEMA 2 20 pts.	Determine la carga $q(t)$ en el capacitor en un circuito LRC cuando $L = 0.25\ henry, R = 10\ ohms,\ C = 0.001\ farad,\ E(t) = 0,$ $q(0) = q_0\ coulombs, i(0) = 0.$
TEMA 3 45 pts. (15 pts. c/u)	Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales: a) $y'' - 4y' + 4y = (x+1)e^{2x}$ b) $x\frac{dy}{dx} + y = x^2y^2$ c) $xdx + (x^2y + 4y)dy = 0; \quad y(4) = 0$
TEMA 4 25 pts.	Determinar la edad aproximada de un fósil si se ha determinado que 17% de C-14 original ha desaparecido (la vida media del C-14 es de 5600 años).

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

TEMA 1 (20 puntos):

<table>
<tr><th></th><th>Explicación</th><th>Operatoria</th></tr>
<tr><td>A.</td><td>Se iguala la pendiente a la función, por lo tanto, m es igual al cambio de y respecto de x, al realizar la tabla con sus respectivas pendientes se puede observar que es una circunferencia con diferentes pendientes y al momento de graficar se obtiene una ecuación cubica como resultado de la misma.

En la gráfica se muestran algunas curvas solución</td><td>
<table>
<tr><th>M</th><th>F(x,y)</th><th>Líneas</th></tr>
<tr><td>-4</td><td>$x^2 + y^2 = -4$</td><td></td></tr>
<tr><td>-1</td><td>$x^2 + y^2 = -1$</td><td></td></tr>
<tr><td>0</td><td>$x^2 + y^2 = 0$</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>$x^2 + y^2 = 1$</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>$x^2 + y^2 = 4$</td><td></td></tr>
</table>


$$m = \frac{dy}{dx}$$
$$x^2 + y^2 = m$$
</td></tr>
</table>

TEMA 2 (20 puntos):

	Explicación	**Operatoria**
A.	Sabiendo la ecuación diferencial de un circuito en serie RLC, utilizando el método de ecuación diferencial homogénea, en este caso es imaginaria por los cual da como resultado una ecuación con coseno y seno para representar los complejos.	$Ri + \frac{1}{C}\int idt + L\frac{di}{dt} = E(t)$ $0.25\frac{dq^2}{d^2t} + 10\frac{dq}{dt} + \frac{1}{0.001}q = 0$ $\frac{dq^2}{d^2t} + 40\frac{dq}{dt} + 4000q = 0$ $m^2 + 40m + 4000 = 0$ $m1 = -20 + 60i$ $m2 = -20 - 60i$
	Utilizando los valores de frontera que se dan en el problema se obtiene c1, luego derivando y valuando se obtiene c2, todo en términos de la carga inicial en el sistema.	$q_c(t) = \; e^{-20x}(C1\;\cos 60x + C2\sin 60x)$ $q_0 = C1$ $q_c{}'(t) = -20e^{-20x}\;(C1\;\cos 60x + C2\sin 60x)$ $+e^{-20x}(C1\;60(-\sin 60x) + C2\cos 60x)$ $0 = -20q_0 + 60C2$ $C2 = -\frac{1}{3}\;q_0$ $\boxed{q_c(t) = \; e^{-20x}\left(\;q_0\cos 60x + -\frac{1}{3}\;q_0\sin 60x\right)}$

TEMA 3 (45 puntos):

	Explicación	**Operatoria**
	Se tiene dos raíces al principio por lo cual quedara una respuesta con raíz entera igual. Luego se siguen los pasos de la variación de parámetros y se suman todas las respuestas.	$y'' - 4y' + 4y = (x+1)e^{2x}$ $y_G = y_H + y_P \qquad y_H = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ $y_P = \mu_1(x)y_1(x) + \mu_2(x)y_2(x)$ $m^2 - 4m + 4 = 0$ $(m-2)(m-2) = 0$ $m_1 = 2;\ m_2 = 2$ $y_H = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$ $y_P = \mu_1(x)e^{2x} + \mu_2(x)xe^{2x}$ $w = \begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & e^{2x} + 2xe^{2x} \end{vmatrix}$ $w = e^{2x}(e^{2x} + 2xe^{2x}) - \left(2e^{2x}(xe^{2x})\right)$ $w = e^{4x} + 2xe^{4x} - 2xe^{4x} = e^{4x}$ $w_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^{2x} \\ (x+1)e^{2x} & e^{2x} + 2xe^{2x} \end{vmatrix}$ $w_1 = -xe^{2x}\left((x+1)e^{2x}\right)$ $w_1 = -xe^{4x}(x+1)$ $w_2 = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & (x+1)e^{2x} \end{vmatrix}$ $w_2 = e^{4x}(x+1)$ $u_1(x) = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + c$ $u_2(x) = \frac{x^2}{2} + x + c$ $\boxed{y_G = C1e^{2x} + C2xe^{2x} + \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)e^{2x} + \left(\frac{x^2}{2} + x\right)xe^{2x}}$
B.	Por la forma se puede apreciar que se puede aplicar Bernoulli el cual cosiste en observar el exponente de la y, y usar u como y elevado a la 1-exp el exponente observado.	$x\frac{dy}{dx} + y = x^2y^2$ Por Bernoulli: $u = y^{1-2} = \frac{1}{y}$ $y = u^{-1} \qquad \frac{dy}{dx} = -u^{-2}\frac{du}{dx}$ $-xu^{-2}\frac{du}{dx} + u^{-1} = x^2(u^{-1})^2]/-xu^{-2}$

	Luego se procede a encontrar las derivadas y sustituir todo hasta simplificar y resolver por lineal.	$\frac{du}{dx} - \frac{u}{x} = x$ Factor Integrante: $FI = e^{-\int \frac{1}{x} dx} = x^{-1}$ Continuación $\int \frac{dy}{dx}\left[\frac{1}{x}.u\right] = \int dx$ $\frac{1}{x}.u = x + c$ $u = x^2 + xc$ $\boxed{y^{-1} = x^2 + xc}$

TEMA 4 (25 puntos):

	Explicación	Operatoria
A.	Sabiendo la ecuación diferencial del decrecimiento poblacional se usa variables separables para obtener el modelo apropiado para este caso. Con los datos de vida media se puede determinar la constante k de esta población. Luego aplicar lo mismo solo que para el tiempo.	$\frac{dx}{dt} = kx$ $\int \frac{dx}{x} = \int kdt$ $\ln(x) = kt + D$ $\mathrm{x} = Ae^{kt}$ vida media: $\frac{A}{2} = Ae^{k(5600)}$ $K = -1.24x10 - 4$ Para 17%: $(0.17) = e^{-1.24x10-4t}$ $\frac{\ln(0.17)}{-1.24x10-4} = t$ $\boxed{t = 14289.97\ años}$