UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-114-6-V-2-00-2017

CURSO:	**Matemática Intermedia 3**
SEMESTRE:	**Segundo**
CÓDIGO DEL CURSO:	**114**
TIPO DE EXAMEN:	**Segunda Retrasada**
FECHA DE EXAMEN:	**12 de enero de 2018**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Sedwin Ramos**
REVISÓ EL EXAMEN:	**Ing. Mario López**

Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ciencias

Departamento de Matemática
Matemática Intermedia 3
Jornada vespertina
Guatemala, 12 de Enero del 2018

Segunda Retrasada

Nombre:	***Carnete:***

Instrucciones: Resolver los problemas que se presentan a continuación en forma clara, ordenada y dejando constancia del procedimiento.

Tema 1 (25 puntos)
Encontrar dos soluciones explícitas del siguiente problema de valores en la frontera:

$$(4xy+3x^2)dx+(2y+2x^2)dy=0 \quad \textbf{con}$$
$$y(0)=-2 \quad \textbf{y}$$
$$y(1)=1$$

Tema 2 (25 puntos)
A un Jamón ahumado, con una temperatura inicial de 70 °F, se le coloca un termómetro para determinar la correcta cocción del mismo. Este se introduce en un horno precalentado a una temperatura constante. Luego de medio minuto el termómetro registra 110 °F y luego de 1 minuto se lee una temperatura de 145 °F. Calcular:

A. El valor de la constante k.
B. La temperatura del horno.

Tema 3 (25 puntos)
Una masa de 1 Kg estira un resorte 0.6125 metros. El sistema masa-resorte se encuentra en un fluido que brinda un amortiguamiento igual a diez veces la velocidad instantánea de la masa.
Si el movimiento inicia un metro por debajo de la posición de equilibrio y se le imprime, a la masa, una velocidad inicial de 12 mts/seg hacia arriba, determinar:

A. La ecuación de la posición en el tiempo $x(t)$.
B. El tiempo en el cual la masa pasa por primera vez por la posición de equilibrio.
C. El tiempo en el cual la masa está en la posición máxima por arriba de la posición de equilibrio.
D. La posición máxima de la masa por arriba de la posición de equilibrio.
E. Hacer un esbozo de la gráfica de la posición de la masa con respecto al tiempo.

Tema 4 (25 puntos)
Un tanque de 500 galones de capacidad, está lleno de agua pura. Le entra salmuera a razón de 5 galones por minuto con una concentración de 2 libras de sal por galón. La solución bien mezclada sale con una razón de 10 galones por minuto.

A. Determine la cantidad de sal $A(t)$ que hay en el tanque en un tiempo t.
B. Calcule el tiempo en el cual el tanque se vacía.

Universidad de San Carlos de Guatemala | **Departamento de Matemática**
Facultad de Ingeniería | **Matemática Intermedia 3**

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema 1 (25 puntos)
Encontrar dos soluciones explícitas del siguiente problema de valores en la frontera:

$$(4xy+3x^2)dx+(2y+2x^2)dy=0 \quad \textbf{con}$$
$$y(0)=-2 \quad \textbf{y}$$
$$y(1)=1$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se verifica si la ecuación diferencial es exacta.	$(4xy+3x^2)dx+(2y+2x^2)dy=0$ $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ $\frac{\partial M}{\partial y}=4x \quad ; \quad \frac{\partial M}{\partial x}=4x$ $Dado\ que{:}\ \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial M}{\partial x}\ ,la\ ecuación\ tiene\ solución\ exacta.$
2.	Se resuelve para $f(x,y)=C$	$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0$ Se tiene que: $\frac{\partial f}{\partial x}=4xy+3x^2$ Integrando respecto de "x" $f(x,y)=\int(4xy+3x^2)+g(y)$ $f(x,y)=4y\frac{x^2}{2}+3\frac{x^3}{3}+g(y)$ $f(x,y)=2x^2y+x^3+g(y)$ Ec.1
3.	De la Ec.1 se tiene que:	$\frac{\partial f}{\partial y}=2x^2+g'(y)\ Ec.2$ $Entonces{:}$ $\frac{\partial f}{\partial y}=M(x,y)$ $\frac{\partial f}{\partial y}=2y+2x^2 \quad Ec.3$

4.	Igualando $Ec.2\ y\ Ec.3$ para obtener $g(y)$	$$2x^2 + g'(y) = 2y + 2x^2$$ $$g'(y) = 2y$$ Integrando respecto a "y" $$g(y) = \int 2y\,dy$$ $$g(y) = 2\frac{y^2}{2} + C_1$$ $$g(y) = y^2 + C_1$$
5.	Se sustituye $g(y)\ en\ Ec.1$, para obtener la solución general.	$$f(x,y) = 2x^2y + x^3 + y^2 + C_1$$ La solución general es: $$C = x^3 + 2x^2y + y^2$$
6.	Aplicando la primera condición inicial.	$$Para\ x = 0 \quad ; \quad y = -2$$ $$C = 2(0)^2(-2) + (0)^3 + (-2)^2$$ $$C = 4$$ Entonces: $$4 = x^3 + 2x^2y + y^2$$
7.	Aplicando la segunda condición inicial.	$$Para\ x = 1 \quad ; \quad y = 1$$ $$C = 2(1)^2(1) + (1)^3 + (1)^2$$ $$C = 4$$ Entonces: $$4 = x^3 + 2x^2y + y^2$$
8.	Determinando la solución explícita.	$$y^2 + 2x^2y + x^3 = C$$ $$y^2 + (2x^2)y + (x^3 - C) = 0$$ $a = 1$ $b = 2x^2$ $c = (x^3 - C)$ $$y_{1,2} = \frac{-2x^2 \pm \sqrt{(2x^2)^2 - 4(1)(x^3 - C)}}{2(1)}$$

		$y_{1,2}=\dfrac{-2x^2\pm\sqrt{4x^4-4(x^3-C)}}{2}$ $y_{1,2}=\dfrac{-2x^2\pm\sqrt{4(x^4-(x^3-C))}}{2}$ $y_{1,2}=-x^2\pm\sqrt{x^4-x^3+C}$
9.	Aplicando la primera condición inicial.	$Para\ x=0\quad ;\quad y=-2$ $y_1=-x^2+\sqrt{x^4-x^3+C}$ $-2=-(0)^2+\sqrt{(0)^4-(0)^3+C}$ $-2=\sqrt{C}$ $C=4$ Entonces: $y_1(x)=-x^2+\sqrt{x^4-x^3+4}$
10.	Aplicando la segunda condición inicial.	$Para\ x=1\quad ;\quad y=1$ $y_2=-x^2-\sqrt{x^4-x^3+C}$ $1=-(1)^2-\sqrt{(1)^4-(1)^3+C}$ $2=-\sqrt{C}$ $C=4$ Entonces: $y_2(x)=-x^2-\sqrt{x^4-x^3+4}$

R./ Las dos soluciones explícitas del problema de valores en la frontera son:

$$y_1(x)=-x^2+\sqrt{x^4-x^3+4}$$

$$y_2(x)=-x^2-\sqrt{x^4-x^3+4}$$

Tema 2 (25 puntos)
A un Jamón ahumado, con una temperatura inicial de 70 °F, se le coloca un termómetro para determinar la correcta cocción del mismo. Este se introduce en un horno precalentado a una temperatura constante. Luego de medio minuto el termómetro registra 110 °F y luego de 1 minuto se lee una temperatura de 145 °F. Calcular:

A. El valor de la constante $\boldsymbol{k}$.
B. La temperatura del horno.

No.	Explicación	Operatoria
1	Se plantea la ecuación diferencial que modela el problema de temperaturas	Se tiene que: $$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$ Resolviendo por variación de parámetros: $$\frac{dT}{(T - T_m)} = kdt$$ $$\int \frac{dT}{(T - T_m)} = \int kdt$$ Sea: $$w = T - T_m$$ $$dw = dT$$ Entonces: $$\int \frac{1}{w} dw = \int kdt$$ $$ln\|w\| = kt + C_1$$ $$ln\|T - T_m\| = kt + C_1$$ $$T - T_m = e^{kt + C_1}$$ $$T = T_m + C_2 e^{kt}$$ $$T = T_m + Ce^{kt}$$
2	Se resuelve la ecuación diferencial por medio de las condiciones iniciales:	$$Para\ t = 0\ ;\ T_1 = 70°F$$ Sustituyendo valores: $$70 = T_m + C_1 e^{k(0)}$$

		Despejando C_1 , se obtiene: $$C_1 = 70 - T_m$$ Entonces: $$T_1 = T_m + (70 - T_m)e^{kt}$$
3	Resolviendo con la segunda condición inicial para para despejar T_m:	$$Para\ t = \frac{1}{2}min\ ;\ T_1 = 110°F$$ $$110 = T_m + (70 - T_m)e^{\frac{1}{2}k}$$ $$110 = T_m + 70e^{\frac{k}{2}} - T_m e^{\frac{k}{2}}$$ $$110 - 70e^{\frac{k}{2}} = T_m\left(1 - e^{\frac{k}{2}}\right)$$ $$T_m = \frac{110 - 70e^{\frac{k}{2}}}{\left(1 - e^{\frac{k}{2}}\right)} \quad , \quad Ec.1$$
4	Resolviendo con la tercera condición inicial.	$$Para\ t = 1\ ;\ T_2 = 145°F$$ $$145 = T_m + (70 - T_m)e^{k}$$ $$145 = T_m + 70e^{k} - T_m e^{k}$$ $$145 - 70e^{k} = T_m(1 - e^{k})$$ $$T_m = \frac{145 - 70e^{k}}{(1 - e^{k})} \quad , \quad Ec.2$$
5	Igualando $Ec.1\ y\ Ec.2$, para determinar el valor de "k"	$$\frac{110 - 70e^{\frac{k}{2}}}{\left(1 - e^{\frac{k}{2}}\right)} = \frac{145 - 70e^{k}}{(1 - e^{k})}$$

		$$(1-e^{k})\left(110-70e^{\frac{k}{2}}\right)=(145-70e^{k})\left(1-e^{\frac{k}{2}}\right)$$ $$110-70e^{\frac{k}{2}}-110e^{k}+70e^{\frac{3k}{2}}=145-145e^{\frac{k}{2}}-70e^{k}+70e^{\frac{3k}{2}}$$ $$0=35-75e^{\frac{k}{2}}+40e^{k}$$ $$Sea \qquad u=e^{\frac{k}{2}}$$ $$u^2=e^{k}$$ $$40u^2-75u+35=0$$ $$8u^2-15u+7=0$$ Se tienen las raíces: $$u_1=1$$ $$u_2=\frac{7}{8}$$ Para u_1 se tiene: $$e^{\frac{k}{2}}=1$$ $$\frac{k}{2}=0$$ $$k=0$$ Para u_2 se tiene: $$e^{\frac{k}{2}}=\frac{7}{8}$$ $$\frac{k}{2}=\ln\left(\frac{7}{8}\right)$$ $$k=2\ln\left(\frac{7}{8}\right)$$
6	De $Ec.1$ se tiene:	$$T_m=\frac{110-70e^{\frac{2\ln\left(\frac{7}{8}\right)}{2}}}{\left(1-e^{\frac{2\ln\left(\frac{7}{8}\right)}{2}}\right)}$$

		$$T_m = \frac{110 - 70\left(\frac{7}{8}\right)}{1 - \frac{7}{8}}$$ $$T_m = \frac{\frac{195}{4}}{\frac{1}{8}}$$ $$T_m = \frac{(195)(8)}{(4)(1)}$$ $$T_m = 390°F$$

R//

El valor de la constante k es:

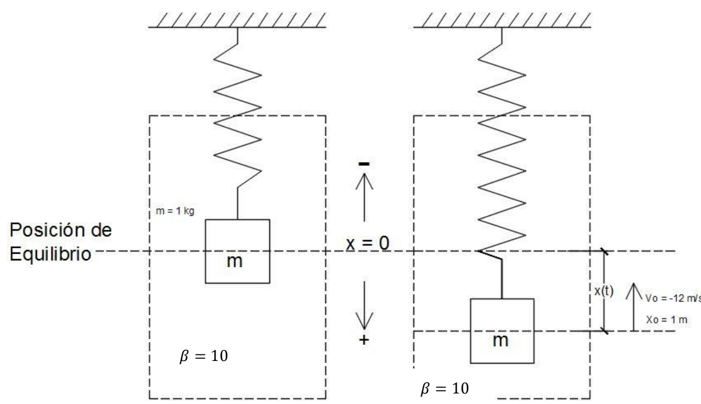
$$k = 2\ln\left(\frac{7}{8}\right)$$

El valor de la temperatura del horno es:

$$T_m = 390°F$$

Tema 3 (25 puntos)
Una masa de 1 Kg estira un resorte 0.6125 metros. El sistema masa-resorte se encuentra en un fluido que brinda un amortiguamiento igual a diez veces la velocidad instantánea de la masa.
Si el movimiento inicia un metro por debajo de la posición de equilibrio y se le imprime, a la masa, una velocidad inicial de 12 mts/seg hacia arriba, determinar:

- **A.** La ecuación de la posición en el tiempo ***x(t)***.
- **B.** El tiempo en el cual la masa pasa por primera vez por la posición de equilibrio.
- **C.** El tiempo en el cual la masa está en la posición máxima por arriba de la posición de equilibrio.
- **D.** La posición máxima de la masa por arriba de la posición de equilibrio.
- **E.** Hacer un esbozo de la gráfica de la posición de la masa con respecto al tiempo.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se plantea la ecuación para el problema de movimiento forzado amortiguado.	 Por la Segunda Ley de Newton, se tiene: $$f = ma$$ $$P = mg$$ $$P = (1\,kg)\left(9.8\frac{m}{s^2}\right)$$ $$P = 9.8\,N$$ Por la Ley de Hooke, se tiene: $$f = kx$$ $$9.8\,N = k(0.6125\,m)$$ $$k = 16\frac{N}{m}$$ La ecuación diferencial que resuelve el problema es: $$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta\frac{dx}{dt}$$ Sustituyendo los valores en la ecuación, se tiene: $$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta\frac{dx}{dt}$$ $$\frac{d^2x}{dt^2} + 16x + 10\frac{dx}{dt} = 0$$

2.	Resolviendo parte homogénea de la ecuación.	$m^2 + 10m + 16 = 0$ $(m+5)^2 = 9$ $m + 5 = \pm 3$ $m_1 = -2$ $m_2 = -8$ Entonces: $x_c(t) = x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-8t}$
3.	Aplicando condiciones iniciales, para determinar el valor de los coeficientes.	$Primera\ condición\ inicial$: $x(0) = 1$ $x(0) = C_1 e^{-2(0)} + C_2 e^{-8(0)}$ $1 = C_1 - C_2$ $C_1 = 1 - C_2\ ,\quad Ec.1$ $Segunda\ condición\ inicial$: $x'(0) = -12\ m/s$ $x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-8t}$ $x'(t) = -2C_1 e^{-2t} - 8C_2 e^{-8t}$ $x'(0) = -2C_1 e^{-2(0)} - 8C_2 e^{-8(0)}$ $-12 = -2C_1 - 8C_2$ $2C_1 = 12 - 8C_2$ $C_1 = 6 - 4C_2\ ,\quad Ec.2$
4.	Igualando $Ec.1\ y\ Ec.2$ para determinar los valores de los coeficientes.	$1 - C_2 = 6 - 4C_2$ $4C_2 - C_2 = 6 - 1$ $3C_2 = 5$ $C_2 = \frac{5}{3}$ De $Ec.1$ se tiene: $C_1 = 1 - C_2 = 1 - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}$ $Entonces\ se\ tiene\ la\ solución\ particular$: $x(t) = -\frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{5}{3}e^{-8t}$

5.	Se determina el primer cero para obtener el valor de "t".	$x(t) = 0$ $0 = -\frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{5}{3}e^{-8t}$ $\frac{5}{3}e^{-8t} = \frac{2}{3}e^{-2t}$ $5e^{-8t} = 2e^{-2t}$ $\frac{5}{2} = \frac{e^{8t}}{e^{2t}}$ $\frac{5}{2} = e^{6t}$ $6t = ln\left\lvert\frac{5}{2}\right\rvert$ $t = \frac{1}{6}ln\left\lvert\frac{5}{2}\right\rvert$ $t = 0.152715122\ s \quad (A)$
6.	Aplicando condiciones iniciales, para determinar la posición máxima y el tiempo.	$x'(t) = -2\left(-\frac{2}{3}\right)e^{-2t} - 8\left(\frac{5}{3}\right)e^{-8t}$ $x'(t) = \frac{4}{3}e^{-2t} - \frac{40}{3}e^{-8t}$ Para que la posición sea máxima se tiene que: $x'(t) = 0$ $0 = \frac{4}{3}e^{-2t} - \frac{40}{3}e^{-8t}$ $\frac{40}{3}e^{-8t} = \frac{4}{3}e^{-2t}$ $10e^{-8t} = e^{-2t}$ $10 = \frac{e^{8t}}{e^{2t}}$ $10 = e^{6t}$

		$6t = ln\|10\|$ $t = \frac{1}{6} ln\|10\|$ $t = 0.383764\ s$ $x(1) = -0.232079\ m$

R//

- La ecuación de la posición en el tiempo ***x(t)***.

$$x(t) = -\frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{5}{3}e^{-8t}$$

- El tiempo en el cual la masa pasa por primera vez por la posición de equilibrio.

$$t = 0.152715122\ s$$

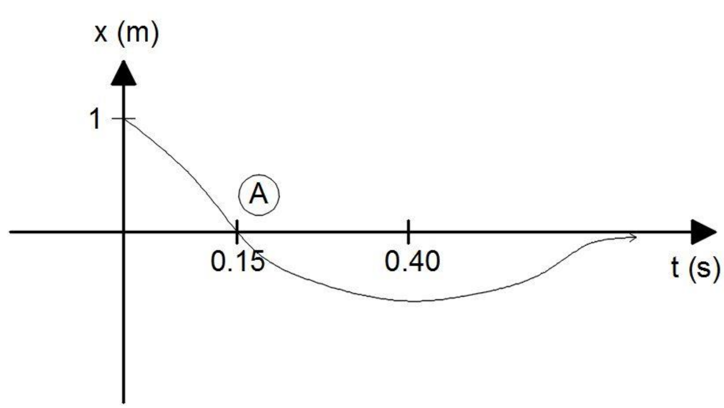
- El tiempo en el cual la masa está en la posición máxima por arriba de la posición de equilibrio.

$$t = 0.383764\ s$$

- La posición máxima de la masa por arriba de la posición de equilibrio.

$$x(1) = -0.232079\ m$$

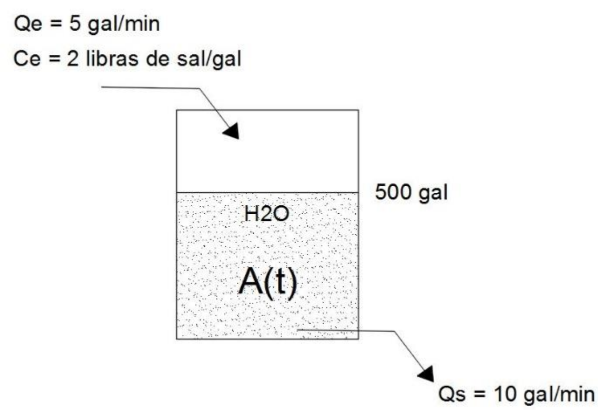
- Esbozo de la gráfica de la posición de la masa con respecto al tiempo.



Tema 4 (25 puntos)

Un tanque de 500 galones de capacidad, está lleno de agua pura. Le entra salmuera a razón de 5 galones por minuto con una concentración de 2 libras de sal por galón. La solución bien mezclada sale con una razón de 10 galones por minuto.

- **A.** Determine la cantidad de sal ***A(t)*** que hay en el tanque en un tiempo ***t***.
- **B.** Calcule el tiempo en el cual el tanque se vacía.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se plantea la ecuación diferencial y se simplifica	 $A(t) = Cantidad\ de\ contaminantes\ en\ el\ tiempo, en\ libras$ $\frac{dA}{dt} = \binom{Razón\ de\ entrada}{de\ sal} - \binom{Razón\ de\ salida}{de\ sal}$ $\frac{dA}{dt} = R_{ent} - R_{sal}$ $\frac{dA}{dt} = Q_e C_e - Q_s C_s$ $\frac{dA}{dt} = \left(2\frac{lb}{gal}\right)\left(5\frac{sal}{min}\right) - (10)\left(\frac{A}{500 + (5-10)t}\right)$ $\frac{dA}{dt} = 10 - \frac{10A}{500 - 5t}$ Se obtiene la Ecuación Diferencial Lineal: $\frac{dA}{dt} + \frac{10A}{5(100-t)} = 10$ $\frac{dA}{dt} + \frac{2A}{(100-t)} = 10$
2.	Resolviendo para obtener el factor de integración	$M(t) = e^{\int \frac{2}{100-t} dt}$ $Si \quad u = 100 - t$ $du = -dt$

		Entonces: $M(t) = -2\int \frac{1}{u}du =$ -2ln$\lvert u\rvert$ $=$ ln$\lvert(100-t)^{-2}\rvert$ $M(t) = e^{\ln\lvert(100-t)^{-2}\rvert}$ $M(t) = (100-t)^{-2}$ $M(t) = \frac{1}{(100-t)^2}$
3.	Sustituyendo y operando	$\frac{1}{(100-t)^2}A = \int \frac{10}{(100-t)^2}dt$ $Si \quad u = 100-t$ $du = -dt$ Entonces: $= -10\int u^{-2}du = \frac{10}{u} + C$ $\frac{A}{(100-t)^2} = \frac{10}{(100-t)} + C$ $A = 10(100-t) + C_1(100-t)^2$
4.	Aplicando condiciones iniciales	$A(0) = 0$ $A = 10(100-0) + C_1(100-0)^2$ $C = -\frac{1}{10}$
5.	Por tanto la ecuación queda	$A(t) = 10(100-t) - \frac{1}{10}(100-t)^2$
6.	Tiempo que tardará en vaciarse el tanque.	$v(t) = 500 - 5t$ $0 = 500 - 5t$ $t = -\frac{500}{-5} = 100\ min$

R//

La cantidad de sal ***A(t)*** que hay en el tanque en un tiempo "t", es:

$$A(t) = 10(100-t) - \frac{1}{10}(100-t)^2$$

El tiempo en el cual el tanque se vacía, es:

$$t = 100\ min$$