UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-116-1-M-1-00-2017

CURSO:	**Matemática Aplicada 3**
SEMESTRE:	**Primero**
CÓDIGO DEL CURSO:	**116**
TIPO DE EXAMEN:	**Primer Examen Parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**15 de febrero de 2017**
REVISO EL EXAMEN:	**Ing. Orlando Orozco**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Pedro Chamale**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Pedro Chamale**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

Universidad de San Carlos de Guatemala **Matemática Aplicada 3**
Facultad de Ingeniería **Primer Examen Parcial**
Departamento de Matemática **15/02/2017**

Nombre____ Carné:___________

Instrucciones: Resuelva los temas que se le plantean a continuación dejando los procedimientos necesarios para justificar sus respuestas (algoritmos). NO se permite el uso de formulario, ni prestar calculadora. **Al finalizar, entregue el temario y el cuadernillo.**

Tema 1

Sea $2^{-\mathrm{x}} + \mathrm{x} * \mathrm{Cos}\ \mathrm{x} = 3\ \mathrm{x} - 1$

a) Calcule la cantidad de iteraciones usando el método de Bisección para obtener la solución con exactitud de 10^{-3}(deje procedimiento).
b) Halle una raíz usando el Método de Bisección en $0 \leq x \leq 1$.

28 puntos

Tema 2:

Encuentre una función $g(x)$ que satisfaga el teorema de punto fijo para la ecuación dada por: $2\,x^3 - 11.7\,x^2 + 17.7\,x - 5 = 0$ en $P_0 = 3.5$. Luego use $g(x)$ encontrada y el método de Punto Fijo para aproximar una raíz con una Tolerancia de 10^{-3}, $P_0 = 3.5$

28 puntos

Tema 3:

Explique lo que se le pregunta, sea breve:

a. Diferencia entre método numérico directo y recursivo
b. Algoritmo
c. Error de truncamiento
d. Método de Bisección (forma gráfica)

16 puntos

Tema 4:

El movimiento de una estructura se define mediante la siguiente ecuación para una oscilación amortiguada:

$$y = 10\ e^{-k\,t}\ \cos\ wt$$

Donde k = 0.5 y w = 2. Determinar la raíz en $[-3, -2]$ con $TOL < 10^{-4}$ usando el método de Newton.

28 puntos

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema 1: 28 puntos

Sea $2^{-x} + x * \text{Cos } x = 3\,x - 1$

a) Calcule la cantidad de iteraciones usando el método de Bisección para obtener la solución con exactitud de 10^{-3}(deje procedimiento).

No.	Explicación	Operatoria
1.	Primero se definen los parámetros con los cuales se le dará solución a la función $f(x)$.	$\text{Tolerancia} = 10^{-3}$ $a = 0$ $b = 1$
2.	Se define la función $f(x)$.	$f(x) = 2^{-x} + x * \text{Cos } x$ $-3\,x + 1$
3.	Se demuestra que la función $f(x)$ es continua en los puntos $a = 0$ y en $b = 1$ y que existe la solución.	$f(0) = 2$ $f(1) = -0.95$
4.	Demostrando que $f(a) * f(b) < 0$ quiere decir que existe una raíz en el intervalo seleccionado, por lo tanto el método de bisección se puede aproximar con la siguiente expresión, donde "n" es el número aproximado de iteraciones.	$2^{-n}(b - a) < Tolerancia$
5.	Sustituyendo los valores en la expresión y despejando la variable n de la desigualdad. Se obtiene el valor de n	$n > 9.96$
6.	Debido a que el número de iteraciones se da en números enteros, la iteración que corresponde para obtener la tolerancia deseada el valor de n, toma el entero mayor al resultado anterior.	$n = 10$

El número de iteraciones necesarias para encontrar una raíz es de:
R./ n = 10

b) Halle una raíz usando el método de Bisección en $0 \leq x \leq 1$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se define la función $f(x)$.	$f(x) = 2^{-\mathrm{x}} + \mathrm{x} * \mathrm{Cos\ x} - 3\,\mathrm{x} + 1$
2.	Se realiza la primera iteración con el intervalo proporcionado. Aplicando la fórmula de bisección.	$p_1 = \dfrac{(1+0)}{2} = 0.5$
3.	Se evalúa la función $f(x)$ en el punto p_1, luego se toma el siguiente criterio para determinar los valores donde se encuentra la raíz. Tomando $f(a) * f(p_1) = R$. Si $R > 0$ la raíz esta en $[p_1, b]$. Si $R < 0$ la raíz está en $[a, p_1]$.	$f(1) * f(0.5) = (-)$ $f(0) * f(0.5) = (+)$
4.	El error para este método numérico consiste en aplicar una resta de los resultados, utilizando la siguiente expresión.	$\mathrm{Error} = \dfrac{(1-0)}{2} = 0.5$

5.

n	a	b	p_n	$f(a) * f(p_n)$	Error
1	0	1	0.5	(+) * (+) = (+)	0.5
2	0.5	1	0.75	(+) * (-) = (-)	0.25
3	0.5	0.75	0.625	(+) * (+) = (+)	0.125
4	0.625	0.75	0.6875	(+) * (+) = (+)	0.0625
5	0.6875	0.75	0.71875	(+) * (-) = (-)	0.03125
6	0.6875	0.71875	0.703125	(+) * (+) = (+)	0.015625
7	0.703125	0.71875	0.710938	(+) * (+) = (+)	0.0078125
8	0.710938	0.71875	0.714844	(+) * (+) = (+)	0.003906
9	0.714844	0.71875	0.716797	(+) * (-) = (-)	0.001953
10	0.714844	0.716797	0.71582	(+) * (+) = (+)	0.0009765

No.	Explicación	Operatoria
6.	Se sigue iterando… hasta que el error sea aproximadamente igual al solicitado. Por lo tanto en esta ecuación se satisface con la tolerancia solicitada en la iteración número 10.	$p_{10} = 0.71582$

R./
La raíz se encuentra en la iteración 10, con un valor de

$$p_{10} = 0.71582$$

Universidad de San Carlos de Guatemala | **Matemática Aplicada 3**
Facultad de Ingeniería | **Primer Examen Parcial**
Departamento de Matemática | **15/02/2017**

Tema 2: 28 puntos

a) Encuentre una función $g(x)$ que satisfaga el teorema de punto fijo para la ecuación dada. ($P_0 = 3.5$)

$$2\,x^3 - 11.7\,x^2 + 17.7\,x - 5 = 0$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se debe despejar cualquier variable x de la ecuación dada, media vez cumpla con el teorema del punto fijo $\lvert g'(x)\rvert < 1$. De esta manera la función $g(x)$ tiene un punto fijo en el intervalo proporcionado.	$\mathrm{x} = g'(x) = \sqrt[3]{\dfrac{11.7\,x^2 - 17.7\,x + 5}{2}}$ $g'(3.5) = 0.94356$
2.	Como la ecuación anterior cumple con el teorema de punto fijo se procede a realizar la primera iteración utilizando la ecuación $g(x)$.	$P_1 = \mathrm{g}(3.5) = 3.50848$
3.	El criterio de paro para este método numérico consiste en aplicar una resta de los resultados, utilizando la siguiente expresión.	Error = $\lvert P_{n+1} - P_n\rvert$ Error = $\lvert 3.50848 - 3.5\rvert = 0.00848$
4.		

n	P_n	$g(P_n)$	Error
0	3.5	3.50848	
1	3.50848	3.51585	0.00848
2	3.51585	3.52225	0.00737
3	3.52225	3.5278	0.0064
4	3.5278	3.5326	0.00555
5	3.5326	3.53676	0.0048
6	3.53676	3.54036	0.00416
7	3.54036	3.54347	0.0036
8	3.54347	3.54617	0.00311
9	3.54617	3.54849	0.0027
10	3.54849	3.5505	0.00232
11	3.5505	3.55224	0.00201
12	3.55224	3.55374	0.00174
13	3.55374	3.55503	0.0015
14	3.55503	3.55615	0.00129
15	3.55615	3.55711	0.00112

	16	3.55711	-------------------	0.00096

5.	La iteración que satisface con el error solicitado, es la iteración 16. (El resultado que se busca es la raíz más cercana del punto inicial P_0=3.5).	$P_{16} = 3.55711$

La raíz aproximada se encuentra en la iteración 16

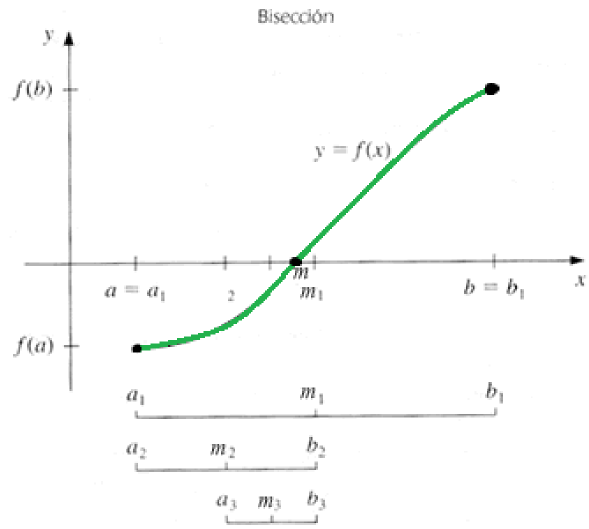
R./$P_{16} = 3.55711$

Tema 3: 16 puntos

Explique lo que se le pregunta, sea breve:

a. Diferencia entre método numérico directo y recursivo
b. Algoritmo
c. Error de truncamiento
d. Método de Bisección (forma gráfica)

No.	**Explicación**
a.	El método numérico directo utiliza técnicas numéricas que se realizan a partir de un problema planteado. Ejemplo: Fórmula cuadrática. El método de recursión, es la forma en la cual se aproxima una solución, realizando una serie de pasos varias veces.
b.	Algoritmo, es un conjunto prescrito de instrucciones o reglas bien definidas.
c.	Error de truncamiento, son aquellos que resultan al usar una aproximación en lugar de un procedimiento matemático exacto.

d.	

Tema 4: 28 puntos.

Dada la función, $y(t) = 10\ e^{-k\,t}\ \cos\ wt$ donde k = 0.5 y w = 2.

a) Determinar la raíz en $[-3, -2]$ con $TOL < 10^{-4}$ usando el método de Newton.

No	**EXPLICACION**	**OPERATORIA**
1	Se evalúa la función $y(t)$ en los puntos extremos del intervalo, para comprobar que exista una raíz en dicho intervalo. Se define P_0 como el valor inicial, este valor puede ser el punto medio del intervalo dado.	$f(-3) = 43.0318$ $f(-2) = -17.7678$
2	Debido a que existe una raíz en este intervalo, se utiliza la expresión numérica de Newton para poder encontrar dicha raíz.	$P_1 = P_0 - \dfrac{f(P_0)}{f'(P_0)}$
3	El valor de P_0 se toma como uno de los puntos extremos del intervalo dado (Puede ser tanto el valor extremo izquierdo o derecho). En este caso $P_0 = -2$.	$P_1 = (-2) - \frac{f(-2)}{f'(-2)}$ = -2.55077

4	Se sigue iterando hasta poder cumplir con la tolerancia deseada. Comprobando la tolerancia usando la siguiente expresión.	$\vert P_{n+1} - P_n \vert$
5	(tabla siguiente)	

n	P_n	Error
0	-2	-----------------
1	-2.55077	0.55077
2	-2.3648	0.18597
3	-2.35623	0.00857
4	-2.35619	0.00004

La raíz aproximada utilizando el método de Newton se encuentra en la iteración

$$\text{R.}/P_4 = -2.35619$$