UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-116-3-M-2-00-2017

CURSO: Matemática Aplicada 3

SEMESTRE: Segundo

CÓDIGO DEL CURSO: 116

TIPO DE EXAMEN: Tercer Examen Parcial

FECHA DE EXAMEN: Septiembre de 2017

REVISO EL EXAMEN: Ing. Orlando Orozco

RESOLVIÓ EL EXAMEN: Pedro Chamale

DIGITALIZÓ EL EXAMEN: Pedro Chamale

COORDINADOR: Ing. José Alfredo González Díaz

Universidad de San Carlos
Facultad de Ingeniería

Matemática aplicada 3
Departamento de Matemática
Tercer parcial

TEMARIO "A"

Nombre: ______________________________________ **Carné:** ____________

INSTRUCCIONES: Resuelva con procedimientos correctos cada uno de los planteamientos propuestos a continuación, **DEJE CONSTANCIA DE UNA ITERACIÓN COMPLETA** para los métodos que se necesiten desarrollar iteraciones. **NO SE PERMITE EL USO DE COMPUTADORAS NI TELEFONOS INTELIGENTES, NO PRESTAMO DE CALCULADORAS.**

TEMA 1 (40 pts.)

La siguiente tabla proporciona el alargamiento de un resorte correspondiente a fuerzas de diferente magnitud que lo deforman.

Puntos	0	1	2	3	4
Longitud del resorte (cm) :y	**10.00**	**4.97**	**2.47**	**1.22**	**0.61**
Fuerza (kgf): x	**0.0**	**2.5**	**5.0**	**7.5**	**10.0**

a) Encuentre el Polinomio de aproximación de grado tres (simplificado), usando Diferencia Divididas de Newton que pasa por los puntos 1, 2, 3 y 4.
b) Use del inciso anterior para encontrar la fuerza para una longitud de 3.25 cm.

TEMA 2 (20 pts.)

a) Determine si la matriz de coeficientes del sistema dado, es diagonalmente dominante, si no es así, haga un reordenamiento de las ecuaciones

$$\begin{aligned} 0.8x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 &= 0 \\ 10x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5 \\ -9x_2 + 0.5x_3 &= 1 \\ x_1 + 4x_3 + 11x_4 &= 4 \end{aligned}$$

b) Utilice el método de Gauss-Seidel para aproximar la solución del sistema dado, con una tolerancia de 10^{-4}. Deje una iteración a mano.

TEMA 3 (20 pts.)

Encuentre los eigenvalores y los eigenvectores de la matriz dada por

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema 1: 40 puntos

a) Encuentre el Polinomio de aproximación de grado tres (simplificado), usando Diferencia Divididas de Newton que pasa por los puntos 1, 2, 3 y 4.

<table>
<tr><th>No.</th><th>Explicación</th><th>Operatoria</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Primero se definen los valores de x_n y de $f(x_n)$ que se utilizaran para realizar el polinomio del grado que se solicita.(Los valores que se encontraran posteriormente, deben estar entre los valores a utilizar, esto para tener una mejor aproximación).</td><td>$x_0 = 2.5\,, f(x_0) = 4.97$
$x_1 = 5.0, f(x_1) = 2.47$
$x_2 = 7.5, f(x_2) = 1.22$
$x_3 = 10.0, f(x_3) = 0.61$</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Se define la siguiente expresión para poder definir el polinomio, se puede armar un polinomio progresivo un polinomio regresivo.</td><td>$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})$</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Se definen los valores de F_{ij}, utilizando la siguiente fórmula para cada uno de los diferentes valores.</td><td>$$\frac{F_{i,j-1} - F_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}$$</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Se realiza el cálculo usando la fórmula anterior, y sustituyendo con los valores iniciales que se definen en el paso número 1.</td><td>$P_{0,1} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{2.47 - 4.97}{5 - 2.5}$
$P_{0,1} = -1$</td></tr>
<tr><td>5.</td><td colspan="2">
<table>
<tr><th>X_n</th><th>F_n</th><th>Primera</th><th>Segunda</th><th>Tercera</th></tr>
<tr><td>2.5</td><td>4.97</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>5</td><td>2.47</td><td>-1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>7.5</td><td>1.22</td><td>-0.5</td><td>0.1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>10</td><td>0.61</td><td>-0.244</td><td>0.0512</td><td>-0.00650667</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>Realizando las sustituciones correspondientes en la expresión $P(x)$ se obtiene el polinomio de grado 3.</td><td>$P(x) =$
$-0.00650667x^3 + 0.19760005x^2 - 2.19733356x + 9.33000$</td></tr>
</table>

a) Use del inciso anterior para encontrar la fuerza para una longitud de 3.25 cm.

No.	**Explicación**	**Operatoria**
1.	Sustituyendo el valor de $x = 3.25cm$ en el polinomio de diferencias divididas de grado 3, se obtiene la respuesta correspondiente.(Debe tomar en cuenta que por términos de espacio se omitieron todos los decimales en la expresión del polinomio, por lo que si evaluara algún valor en el polinomio podría variar su respuesta, para obtener un valor más exacto utilice su calculadora programable).	$P(3.25) =$ $-0.00650667(3.25)^3 + 0.1976000500(3.25)^2 - 2.1973335(3.25) + 9.33000$ $P(3.25) = 4.052455$

R./
El valor evaluado en 3.25cm utilizando el método de Diferencias Divididas es de

$$\mathrm{P}(3.25) = 4.052455$$

Tema 2:

a) Determine si la matriz de coeficientes del sistema dado, es diagonalmente dominante, si no es así, haga un reordenamiento de las ecuaciones

$$\begin{aligned} 0.8x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 &= 0 \\ 10x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5 \\ -9x_2 + 0.5x_3 &= 1 \\ x_1 + 4x_3 + 11x_4 &= 4 \end{aligned}$$

b) Utilice el método de Gauss-Seidel para aproximar la solución del sistema dado, con una tolerancia de 10^{-4}. Deje una iteración a mano.

No.	**Explicación**	**Operatoria**
1.	Lo primero que se debe analizar si el valor inicial que se encuentra en la diagonal principal cumple con ser una matriz dominante.	$\lvert 0.8\rvert > \lvert 4+1+1\rvert$ $\lvert 2\rvert > \lvert 10-1+0\rvert$ $\lvert 0.5\rvert > \lvert 9+0+0\rvert$ $\lvert 11\rvert > \lvert 4+0+1\rvert$

2.

Debido a que no cumple con la condición de ser una matriz estrictamente dominante, se procede a realizar un reordenamiento para que pueda cumplir con la condición requerida.

$$\begin{aligned} 10x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad &= 5 \\ -9x_2 + 0.5x_3 \qquad &= 1 \\ 0.8x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 \qquad + 4x_3 + 11x_4 &= 4 \end{aligned}$$

3.

Se vuelve a realizar la prueba para confirmar que la matriz reordenada, cumple con la condición de ser una matriz estrictamente dominante.

$$|10| > |3|$$
$$|9| > |0.5|$$
$$|4| > |2.8|$$
$$|11| > |5|$$

4.

Luego se despeja cada una de las x_n de cada una de las ecuaciones, es importante tomar en cuenta que se debe despejar la x_n con el valor mayor, por eso el propósito de lograr que esta cumpla con la condición de ser estrictamente dominante.

$$x_1 = \frac{5 - 2x_2 + x_3}{10}$$
$$x_2 = \frac{1 - 0.5x_3}{-9}$$
$$x_3 = \frac{-x_4 + x_2 - 0.8x_1}{4}$$
$$x_4 = \frac{4 - 4x_3 - x_1}{11}$$

5.

Se toma como valor inicial o vector de arranque el vector $X_0 = \langle 0,0,0 \rangle$, se procede a evaluar en las ecuaciones que se despejaron en el paso anterior.

$$x_1 = 0.5$$
$$x_2 = -0.11111$$
$$x_3 = -0.12777$$
$$x_4 = 0.364646$$

7.

n	X_1	X_2	X_3	X_4	**Error**
0	0	0	0	0	---------------------
1	0.5	-0.111111	-0.127777	0.364646	0.5
2	0.509444	-0.118209	-0.222602	0.398269	0.094825
3	0.501381	-0.123477	-0.230713	0.401951	0.008110
4	0.501624	-0.123928	-0.231794	0.402323	0.001081
5	0.501606	-0.123988	-0.231899	0.402362	0.000104
6	0.501607	-0.123994	-0.231910	0.402366	0.000001

TEMA 3 (20 pts.)

Encuentre los eigenvalores de la matriz dada por

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se define la siguiente sintaxis para poder determinar los eigenvalores de la siguiente matriz.	$A - \lambda I = 0$
2.	Se procede a realizar la operación que se describe en el paso anterior, generando una nueva matriz que queda de la siguiente manera	$\begin{matrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{matrix}$
3.	Se procede a encontrar el determinante de la matriz que se define en el paso anterior.	$Det\ A = (2-\lambda)[(2-\lambda)(2-\lambda)-1] - (-1)[-(2-\lambda)+1] + (1)[1-(2-\lambda)]$
4.	Se procede a simplificar el polinomio, tomando en cuenta que la variable en este caso se tomara como λ, entonces se procede a simplificar todo lo posible y a encontrar la solución para λ.	$\lambda = 1$ $\lambda = 4$

Los eigenvalores de la matriz son los siguientes:

R./$\lambda = 1 \quad o \quad \lambda = 4$