UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-118-1-M-1-00-2017

CURSO:	**Matemática Aplicada 1**
SEMESTRE:	**Primer**
CÓDIGO DEL CURSO:	**118**
TIPO DE EXAMEN:	**Primer Examen Parcial**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Albert Miguel Chuy**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Albert Miguel Chuy**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

Primer Examen Parcial

TEMA 1. 16 pts. (4 pts c/u): A continuación se le presntan una serie de enunciados, marque una "F"si el enunciado es FALSO y una "V"si es VERDADERO:

1. Para resolver la transformada $\mathscr{L}\left\{\boldsymbol{e^{ab}t^{n}}\right\}$ se debe utilizar el primer teorema de traslación: ________
2. La definición de trasnformada es la siguiente $\int_0^\infty \boldsymbol{e^{st}f(t)dt}$: ________
3. La Transformada de Laplace puede resolver todas las **EDO'S** que existen: ________
4. Si $\boldsymbol{f(t)}$ no es continua por partes en $\boldsymbol{t \geq 0}$, entonces $\mathscr{L}\left\{\boldsymbol{f(t)}\right\}$ no existe: ________

TEMA 2. 64 pts. (8 pts c/u): marque la respuesta correcta:

1. A cierta función $\boldsymbol{f(t)}$ se le aplicó la Definición de la Transformada de Laplace, simplificando quedó escrita como $\boldsymbol{\lim_{b\to\infty}\left(\int_0^\infty e^{-t(s-a)}t^2dt\right)}$, cual es la Transformada de Laplace de dicha función $\boldsymbol{f(t)}$:

$F(S) = \dfrac{2}{s^3}$	$F(S) = \dfrac{4}{(s-a)^3}$	$F(S) = \dfrac{6}{(s+a)^4}$	$F(S) = \dfrac{6}{(s-a)^4}$	NAC

2. Encontrar $\mathscr{L}\{\boldsymbol{f(t)}\}$ si $\boldsymbol{f(t) = \sin^2(a\cdot k\cdot t)}$; donde **"$a$"** & **"$k$"** son constantes:

$F(S) = \dfrac{1}{2s} - \dfrac{s}{2\left(s^2+4(a+k)^2\right)}$	$F(S) = \dfrac{1}{2s} + \dfrac{s}{2\left(s^2+4a^2k^2\right)}$	$F(S) = \dfrac{1}{2s} - \dfrac{s}{2\left(s^2+4a^2k^2\right)}$	NAC

3. Encontrar $\mathscr{L}\{\boldsymbol{f(t)}\}$ si $\boldsymbol{f(t) = \sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)}$:

$F(s) = \left(\frac{1}{s^2+1}\right)$	$F(s) = \left(\frac{2}{s^2+4}\right)$	$F(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)$	$F(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{1}{2}}{s^2+\frac{1}{4}}\right)$	NAC

4. Encontrar $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$ si $F(s)=\dfrac{2s+1}{s^2-10s+29}$:

$2e^{-3t}\cos(5t)-\frac{1}{5}e^{-3t}\sin(5t)$	$3e^{5t}\cos(3t)+\frac{17}{3}e^{5t}\sin(3t)$	$2e^{5t}\cos(2t)+\frac{11}{2}e^{5t}\sin(5t)$	NAC

5. Encontrar $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$ si $F(s)=\dfrac{1}{LS^2-n^2k^2}$ donde "L", "n" & "k" son constantes:

$f(t)=\frac{\sqrt{L}}{nk}\sinh\left(\frac{nk}{\sqrt{L}}t\right)$	$f(t)=\frac{1}{\sqrt{L}nk}\sinh\left(\frac{nk}{\sqrt{L}}t\right)$	$f(t)=\frac{1}{\sqrt{n}Lk}\sinh\left(\frac{Lk}{\sqrt{n}}t\right)$	NAC

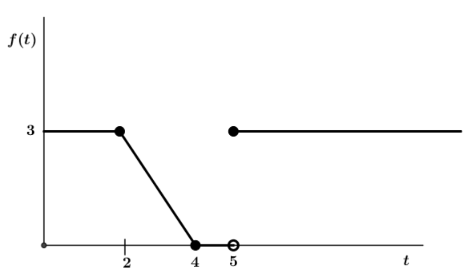
6. Encontrar $\mathscr{L}\{f(t)\}$ si $f(t)=\left(-t^2+3t+5\right)u(t-2)$:

$F(S)=e^{-2s}\left(-\frac{2}{s^3}+\frac{3}{s^2}+\frac{5}{s}\right)$	$F(S)=e^{-2s}\left(-\frac{2}{s^3}+\frac{1}{s^2}+\frac{9}{s}\right)$	$F(S)=e^{-2s}\left(-\frac{2}{s^3}-\frac{1}{s^2}+\frac{7}{s}\right)$	NAC

7. Encontrar $\mathscr{L}\{f(t)\}$ si $f(t)=e^{(a+b)t}r(t)$ donde "a" & "b" son constantes y $r(t)$ cualquier función:

$F(S)=R(s-(a+b))$	$F(S)=R((a+b))$	$F(S)=R(s+(a+b))$	$F(S)=e^{-(a+b)}R(s)$	NAC

7. Encontrar $\mathscr{L}\{f(t)\}$ de la funión por tramos:



a) $F(S)=\frac{3e^{-2s}}{2s^2}-\frac{3e^{-4s}}{2s^2}-\frac{3e^{-5s}}{s}-\frac{3}{s}$
b) $F(S)=-\frac{4e^{-2s}}{3s^2}+\frac{4e^{-5s}}{s}+\frac{4e^{-5s}}{3s^2}+\frac{4}{s}$
c) $F(S)=-\frac{3e^{-2s}}{2s^2}+\frac{3e^{-4s}}{2s^2}+\frac{3e^{-5s}}{s}+\frac{3}{s}$
d) NAC

TEMA 3. 20 pts.: Aplique la transformada de Laplace para resolver la siguiente ecuación diferencial (deje constancia de todo su procedimiento)

$$y''-5y'+5y=te^t$$

sujeto a las condiciones $y(0)=0$ & $y'(0)=0$

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

TEMA 1. 16 pts. (4 pts c/u): A continuación se le presntan una serie de enunciados, marque una "F"si el enunciado es FALSO y una "V"si es VERDADERO:

1. Para resolver la transformada $\mathscr{L}\left\{e^{ab}t^{n}\right\}$ se debe utilizar el primer teorema de traslación: __V_
2. La definición de trasnformada es la siguiente $\int_{0}^{\infty} e^{st} f(t) dt$: __F__
3. La Transformada de Laplace puede resolver todas las **EDO'S** que existen: __V__
4. Si $f(t)$ no es continua por partes en $t \geq 0$, entonces $\mathscr{L}\left\{f(t)\right\}$ no existe: __F__

TEMA 2. 64 pts. (8 pts c/u): marque la respuesta correcta:

1. A cierta función $f(t)$ se le aplicó la Definición de la Transformada de Laplace, simplificando quedó escrita como $\lim_{b\to\infty}\left(\int_{0}^{\infty} e^{-t(s-a)} t^{2} dt\right)$, cual es la Transformada de Laplace de dicha función $f(t)$:

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se aplica la definición de Integrales por partes, para resolver la integral, quedándonos la siguiente expresión	$\int_0^{\infty} \frac{2e^{-t(s-a)}t}{(s-a)} dt$
2.	Al resolver la integral, el primer término se hace cero, y queda otra integral. Se vuelve a resolver por partes.	$\frac{2}{(s-a)^2}\left[\frac{-e^{-t(s-a)}}{(s-a)}\right]_0^{\infty}$
3.	Se simplifica y da como resultado la Transformada	$\mathscr{L}\left\{f(t)\right\} = \frac{2}{(s-a)^3}$

Respuesta: **NAC**

2. Encontrar $\mathscr{L}\{f(t)\}$ si $f(t) = \sin^2(a \cdot k \cdot t)$; donde "$a$" & "$k$" son constantes:

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se utiliza una identidad trigonométrica para simplificar la función trigonométrica	$\sin^2(akt) = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2akt)}{2}$
2.	Se aplica la transformada de Laplace a los dos términos.	$\mathscr{L}\left\{f(t)\right\} = \frac{1}{2s} - \frac{s}{2(s^2+4a^2k^2)}$

$$\text{Respuesta: } \boldsymbol{F(S) = \frac{1}{2s} + \frac{s}{2\left(s^2 + 4a^2k^2\right)}}$$

3. Encontrar $\mathscr{L}\{\boldsymbol{f(t)}\}$ si $\boldsymbol{f(t) = \sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)}$:

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se utiliza una identidad trigonométrica para simplificar la función trigonométrica	$\sin\left(\frac{1}{2}\right)\cos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin t$
2.	Se aplica la transformada de Laplace al término resultante.	$\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)$

$$\text{Respuesta: } \boldsymbol{F(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)}$$

4. Encontrar $\mathscr{L}^{-1}\{\boldsymbol{F(s)}\}$ si $\boldsymbol{F(s) = \frac{2s+1}{s^2 - 10s + 29}}$:

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se factoriza el denominador.	$s^2 - 10s + 29 = (s-5)^2 + 4$
2.	Se sustituye en la operación original, y se separan las fracciones.	$\frac{2s+1}{(s-5)^2+4} = \frac{2s}{(s-5)^2+4} + \frac{1}{(s-5)^2+4}$
3.	Aplicamos la transformada de Laplace a cada uno de los términos.	$\frac{2s}{(s-5)^2+4} = e^{5t}\left(2\cos(2t) + 5\sin(2t)\right)$
4.	Aplicamos la transformada de Laplace a cada uno de los términos.	$\frac{1}{(s-5)^2+4} = e^{5t}\cos t \sin t$

5.	Se simpliica y se obtiene la Transformada Inversa de Laplace de la función $F(S)$.	$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = 2e^{5t}\cos 2t + \frac{11}{2}e^{5t}\sin 2t$

Respuesta: **NAC**

5. Encontrar $\boldsymbol{\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}}$ si $\boldsymbol{F(s) = \frac{1}{LS^2 - n^2k^2}}$ donde "$\boldsymbol{L}$", "$\boldsymbol{n}$" & "$\boldsymbol{k}$" son constantes:

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se simplifica la función trigonométrica y se ordena	$\frac{1}{\left(\sqrt{L}s\right)^2 - (nk)^2}$
2.	Se simplifica la función y se reescribe en busca de una transfomada inversa directa	$\left(\frac{1}{\sqrt{L}nk}\right)\left(\frac{\frac{nk}{\sqrt{L}}}{s^2 - \left(\frac{nk}{\sqrt{L}}\right)^2}\right)$
3.	Se aplica la transfomada inversa directa y se sabe que es un *Sinh*	$\frac{1}{\sqrt{L}nk}\sinh\left(\frac{nk}{\sqrt{L}}t\right)$

Respuesta: $\boldsymbol{\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{\sqrt{L}nk}\sinh\left(\frac{nk}{\sqrt{L}}t\right)}$

6. Encontrar $\boldsymbol{\mathscr{L}\{f(t)\}}$ si $\boldsymbol{f(t) = \left(-t^2 + 3t + 5\right)u(t-2)}$:

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se utilizará el teorema	$\mathscr{L}\{f(t)U(t-a)\} = e^{-as}\mathscr{L}\{f(t+a)\}$

2.	Se sustituye en la función	$\mathscr{L}\left\{\left[-(t+2)^2+3(t+2)+5\right]\right\}e^{-2s}$
3.	Se simplifica el polinomio	$\mathscr{L}\left\{\left(-t^2-t+7\right)\right\}e^{-2s}$
4.	Se aplica la transformada	$\left(-\frac{2}{s^3}-\frac{1}{s^2}+\frac{7}{s}\right)e^{-2s}$

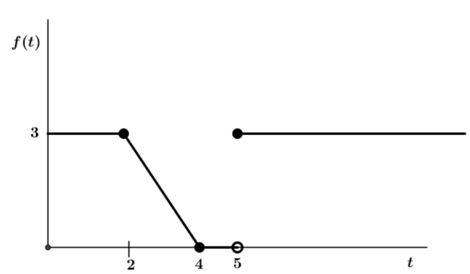
Respuesta: $\mathscr{L}\left\{\boldsymbol{f(t)}\right\} = \boldsymbol{\left(-\frac{2}{s^3}-\frac{1}{s^2}+\frac{7}{s}\right)e^{-2s}}$

7. Encontrar $\mathscr{L}\left\{\boldsymbol{f(t)}\right\}$ si $\boldsymbol{f(t)=e^{(a+b)t}r(t)}$ donde **"$\boldsymbol{a}$"** & **"$\boldsymbol{b}$"** son constantes y $\boldsymbol{r(t)}$ cualquier función:

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se aplica el primer teorema de traslación	$\mathscr{L}\left\{e^{at}f(t)\right\}=F(s-a)$
2.	Se sustituye en la función	$\mathscr{L}\left\{e^{(a+b)t}r(t)\right\}=R(s-(a+b))$
3.	Se simplifica la Transformada	$\mathscr{L}\left\{e^{(a+b)t}r(t)\right\}=R(s-a-b)$

Respuesta: $\mathscr{L}\left\{\boldsymbol{e^{(a+b)t}r(t)}\right\} = \boldsymbol{R(s-(a+b))}$

8. Encontrar $\mathscr{L}\left\{\boldsymbol{f(t)}\right\}$ de la funión por tramos:



Se define la función por partes: $f(x) = \begin{cases} 3 & 0 \leq t \leq 2 \\ -\dfrac{3}{2}t + 6 & 2 \leq t \leq 4 \\ 0 & 4 \leq t < 5 \\ 3 & t \geqslant 5 \end{cases}$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se aplica la definición de transformada a cada una de las partes de la función	$\int_0^2 3e^{-st}dt + \int_2^4 \left(-\frac{3}{2}t + 6\right) e^{-st}dt$ $+ \int_4^5 0e^{-st}dt + \int_5^\infty 3e^{-st}dt$
2.	Se resuelve cada una de las integrales.	$-\frac{3}{s}\left(e^{-2s} - e^0\right) + \frac{3}{2s^2}\left(e^{-4s} - e^{-2s}\right)$ $+\frac{3}{2s}\left(4e^{-4s} - 2e^{-2s}\right) - \frac{6}{s}\left(e^{-4s} - e^{-2s}\right)$ $-\frac{3}{s}\left(e^{\infty s} - e^{-5s}\right)$
3.	Se simplifican términos semejantes	$-\frac{3e^{-2s}}{2s^2} + \frac{3e^{-4s}}{2s^2} + \frac{3e^{-5s}}{s} + \frac{3}{s}$

Respuesta: $\mathscr{L}\left\{\boldsymbol{f(t)}\right\} = -\frac{\mathbf{3}\boldsymbol{e^{-2s}}}{\mathbf{2}\boldsymbol{s^2}} + \frac{\mathbf{3}\boldsymbol{e^{-4s}}}{\mathbf{2}\boldsymbol{s^2}} + \frac{\mathbf{3}\boldsymbol{e^{-5s}}}{\boldsymbol{s}} + \frac{\mathbf{3}}{\boldsymbol{s}}$

TEMA 3. 20 pts.: Aplique la transformada de Laplace para resolver la siguiente ecuación diferencial (deje constancia de todo su procedimiento)

$$\boldsymbol{y'' - 5y' + 5y = te^t}$$

sujeto a las condiciones $\boldsymbol{y(0) = 0}$ & $\boldsymbol{y'(0) = 0}$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se aplica la definición de transformada a cada uno de los términos de la ecuación diferencial	$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$ $-5(sY(s) - y(0)) + 5Y(s) = \dfrac{1}{(s-t)^2}$
2.	Se simplifica y se agrupan términos semejantes	$Y(s)(s^2 - 5s + 5) = \dfrac{1}{(s-1)^2}$
3.	Se despeja $Y(s)$	$Y(s) = \dfrac{1}{(s^2 - 5s + 5)(s-1)^2}$
4.	Se aplican Fracciones Parciales	$\dfrac{1}{(s^2 - 5s + 5)(s-1)^2} = \dfrac{A}{(s-1)} + \dfrac{B}{(s-1)^2}$ $+\dfrac{Cs + D}{(s^2 - 5s + 5)}$
5.	Al resolver las fracciones parciales, se reescribe la ecuación	$Y(s) = \dfrac{3}{(s-1)} + \dfrac{1}{(s-1)^2} + \dfrac{3s + 11}{(s^2 - 5s + 5)}$
6.	Se aplica la transformada inversa de laplace a los primeros dos términos, ya que es de forma directa	$y(t) = 3e^t + te^t$
7.	El último término se manipula para que se pueda aplicar la transformada inversa de laplace	$\dfrac{-3s + 11}{s^2 - 5s + 5} = \dfrac{-3s + 11}{\left(s - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}$
8.	Se manipula el término y se simplifica	$= \dfrac{-3\left(s - \frac{5}{2}\right) + \frac{7}{2}}{\left(s - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}$

9.	Se aplica el teorema de traslación $s \to s - \frac{5}{2}$, y se sustituye en la función	$$= \frac{-3s + \dfrac{7}{2}}{s^2 - \dfrac{5}{4}}$$
10.	Se separan las fracciones y aplicamos la transformada inversa de laplace a cada una de las fracciones	$$\left[-3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 - \dfrac{5}{4}}\right\}\right]_{s\to s-\frac{5}{2}}$$ $$+\left[\frac{7}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - \dfrac{5}{4}}\right\}\right]_{s\to s-\frac{5}{2}}$$
11.	Se manipula el segundo término para que se pueda transformar directamente	$$\left[-3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 - \dfrac{5}{4}}\right\}\right]_{s\to s-\frac{5}{2}}$$ $$+\left[\frac{7}{\sqrt{5}}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\dfrac{\sqrt{5}}{2}}{s^2 - \dfrac{5}{4}}\right\}\right]_{s\to s-\frac{5}{2}}$$
12.	Se transforman inversamente los términos	$e^{\frac{5}{2}t}\left[-3\cosh\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)t + \frac{7}{\sqrt{5}}\sinh\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)t\right]$

Respuesta: $\boldsymbol{y(t) = 3e^t + te^t + e^{\frac{5}{2}t}\left[-3\cosh\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)t + \frac{7}{\sqrt{5}}\sinh\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)t\right]}$