UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-118-1-M-2-12-2017

CURSO:	**Matemática Aplicada 1**
SEMESTRE:	**Curso de vacaciones Diciembre 2017**
CÓDIGO DEL CURSO:	**118**
TIPO DE EXAMEN:	**Primer Parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**Diciembre 2017**
HORARIO DE EXAMEN:	**11:00 – 13:00**
AUXILIAR:	**Oscar Arias**
CLAVE:	**CLAVE-118-1-M-2-12-2017**

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA FACULTAD DE INGENIERIA
PRIMER PARCIAL

TEMA No 1 (10 puntos)

Por definición hallar la transformada de $f(t) = cos2t$

TEMA No2 (30 puntos)

Hallar la transformada de:

a) $f(t) = t^2 sen2t$

b) $f(t) = e^{-4t} cos8t$

c) $f(t) = (2t+3)^4$

TEMA No 3 (30 puntos)

Hallar la transformada inversa de :

a) $F(S) = \frac{S}{(S+2)(S^2+3)}$

b) $F(S) = \frac{2S+3}{S^2+6S+34}$

c) $F(S) = \frac{1}{S^3+4S}$

TEMA No 4 (30 puntos)

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y' - y = 2cos5t$ $\qquad y(0) = 0$

b) $y'' + 9y = e^{4t}$ $\qquad y(0) = 0 \ , \ y'(0) = 0$

Tema 1 (10 puntos)

Por definición hallar la transformada de $f(t) = cos2t$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se tiene un sistema de 3 tanques a los cuales les es entregada y extraída una solución en diferentes proporciones. Para el tanque A se tiene que recibe 2 gal/min del tanque B por los 100 $galones$ que posee y que entrega 6 gal/min por los 100 $galones$ que posee. Al simplificar se obtiene la primera ecuación del sistema.	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$ $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty Cos(2t)e^{-st}dt$
2.	Se realiza la integración, para este caso se integra por partes dos veces y simplificando se obtiene el siguiente resultado para luego evaluarlo con los límites de integración.	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \left[-\frac{se^{-st}Cos[2t]}{s^2+4} - \frac{2e^{-st}Sin[2t]}{s^2+4}\right]_0^\infty$
3.	Por medio de las propiedades de una integral impropia se sabe que al evaluar ambos términos con infinito se obtiene cero, luego al evaluar con cero y simplificar finalmente se tiene la trasformada de Laplace de la función.	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \left[0 - \left(-\frac{s}{s^2+4}\right)\right]$ $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{s}{s^2+4}$

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{s}{s^2+4}}$$

Universidad de San Carlos de Guatemala **Departamento de Matemática**
Facultad de Ingeniería **Matemática Aplicada 1**

Tema 2 (30 puntos)

Hallar la transformada de:

A) $f(t) = t^2 sen2t$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Para determinar la transformada de Laplace de la función dada se realiza primero la transformada del seno y se deja indicado que se realizará la segunda derivada de la misma	$\mathcal{L}\{Sin[2t]\} = \frac{2}{s^2+4}$ $\mathcal{L}\{f(t)\} = d^2\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}$
2.	Se realiza la primera derivada del término dentro de los corchetes por medio de la regla de la división. Se deja indicado que se realizara una derivada más	$\mathcal{L}\{f(t)\} = d\left\{-\frac{4s}{(s^2+4)^2}\right\}$
3.	Finalmente se realiza la derivada del término obtenido y se simplifica para tener la transformada de Laplace de la función dada en el enunciado	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{-4(s^2+4)^2+16s^2(s^2+4)}{(s^2+4)^4}$ $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{12s^2-16}{(s^2+4)^3}$

R./

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{12s^2-16}{(s^2+4)^3}$$

B) $f(t) = e^{-4t}Cos8t$

No	**EXPLICACION**	**OPERATORIA**
1.	La forma de realizar la transformada de Laplace es por medio del primer teorema de traslación ya que se cuenta con un exponencial acompañado de otra función diferente a una exponencial. Primero se halla la transformada de Laplace de la función no exponencial	$\mathcal{L}\{Cos[8t]\} = \frac{s}{s^2+64}$
2.	Se indica después de la forma resultante de la transformada de la función diferente de exponencial que s tiende a $s+4$ por el valor exponencial que posee la función e.	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \left[\frac{s}{s^2+64}\right]\downarrow_{s\to s+4}$
3.	Se sustituye en cada s el valor que se indica del exponencial. Dando así como resultado la transformada de Laplace de la función dada al incio.	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \left[\frac{s+4}{(s+4)^2+64}\right]$

R./
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \left[\frac{s+4}{(s+4)^2+64}\right]$$

C) $f(t) = (2t + 3)^4$

No.	Explicación	Operación
1.	Se tiene un producto notable y para poder hallar la transformada de Laplace primero se debe desarrollar dicho producto.	$(2t + 3)^4 = 16t^4 + 96t^3 + 216t^2 + 216t + 81$
2.	Se debe transformar cada término del producto desarrollado.	$\mathcal{L}\{f(t)\} = 16\left(\frac{4!}{s^5}\right) + 96\left(\frac{3!}{s^4}\right) + 216\left(\frac{2!}{s^3}\right) + \frac{216}{s^2} + \frac{81}{s}$
3.	Se simplifica lo obtenido y así ya se tiene la trasformada de Laplace de la función dada.	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \left(\frac{384}{s^5}\right) + \left(\frac{576}{s^4}\right) + \left(\frac{432}{s^3}\right) + \frac{216}{s^2} + \frac{81}{s}$

R./

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \left(\frac{384}{s^5}\right) + \left(\frac{576}{s^4}\right) + \left(\frac{432}{s^3}\right) + \frac{216}{s^2} + \frac{81}{s}$$

Tema 3: (30 puntos)

Hallar la Transformada Inversa de:

a) $F(s) = \frac{s}{(s+2)(s^2+3)}$

No.	Explicación	Operación
1.	No puede ser calculada la trasformada inversa de Laplace directamente en la forma que está representada la función dada, por lo que debe descomponerse en fracciones parciales.	$\frac{A}{s+2} + \frac{Bs+C}{s^2+3} = \frac{s}{(s+2)(s^2+3)}$
2.	Se igualan los denominadores los cuales se eliminan y los numeradores quedan de la siguiente manera.	$A(s^2+3)+(Bs+C)(s+2) = s$
3.	Al desarrollar los productos indicados y factorizando para los valores de s.	$s^2(A+B) + s(2B+C) + (3A+2C) = s$
4.	Al igualar ambos miembros de la ecuación se obtiene el siguiente sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas.	$A+B=0)$ $2B+C=1$ $3A+2C=0$
5.	Al resolver el sistema.	$A=-\frac{2}{7}, B=\frac{2}{7},\ C=\frac{3}{7}$
6.	Se sustituyen en la función original y se transforman inversamente.	$\mathcal{L}^{-1}\{f(t)\} = -\frac{2}{7} * \frac{1}{s+2} + \frac{2}{7} * \frac{s}{s^2+3} + \frac{3}{7} * \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} * \frac{1}{s^2+3}$
7.	De esta manera ya es posible transformar inversamente. Un último arreglo se le da al tercer término que para cumplir con la forma estándar del seno debe tener la raíz del término constante del denominador en el numerador	$\mathcal{L}^{-1}\{f(t)\} = -\frac{2}{7}e^{-2t} + \frac{2}{7}Cos[\sqrt{3}t] + \frac{3}{7\sqrt{3}}Sin[\sqrt{3}t]$

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\{f(t)\} = -\frac{2}{7}e^{-2t} + \frac{2}{7}Cos[\sqrt{3}t] + \frac{3}{7\sqrt{3}}Sin[\sqrt{3}t]}$$

b) $F(s) = \frac{2s+3}{s^2+6s+34}$

No.	**Explicación**	**Operatoria**
1.	Como no es posible transformar inversamente directamente, en el denominador se realiza una completación al cuadrado.	$F(s) = \dfrac{2s+3}{(s+3)^2+25}$
2.	Al visualizar el denominador se ve que posee el primer teorema de traslación, por lo que la s restante en el numerador deberá sumársele3. Pero para que esto suceda se hace un arreglo	$\dfrac{2(s+3-\frac{3}{2})}{(s+3)^2+25} = \dfrac{2(s+3)}{(s+3)^2+25} - \dfrac{3}{(s+3)^2+25}$
3.	Ya es posible transformar inversamente Lo cual conlleva escribir primero el resultado del primer teorema de traslación inverso e indicar lo restante a trasformar.	$\mathcal{L}^{-1}\{f(t)\} = \dfrac{2(s+3)}{(s+3)^2+25} - \dfrac{3}{(s+3)^2+25}$ $\mathcal{L}^{-1}\{f(t)\} = 2e^{-3t}\left\{\dfrac{s}{s^2+25}\right\} - 3e^{-3t} * \dfrac{5}{5}\left\{\dfrac{1}{s^2+25}\right\}$
4.	Finalmente se trasforma lo restante.	$\mathcal{L}^{-1}\{f(t)\} = 2e^{-3t}Cos[5t] - \dfrac{3}{5}e^{-3t}Sin[5t]$

R./

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(t)\} = 2e^{-3t}Cos[5t] - \frac{3}{5}e^{-3t}Sin[5t]$$

c) $F(s) = \frac{1}{s^3+4s}$

No	EXPLICACION	OPERATORIA
1.	Primero se factoriza el denominador y se expresa como fracciones parciales	$\frac{1}{s^3+4s} = \frac{1}{s(s^2+4)}$ $\frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+4} = \frac{1}{s^3+4s}$
2.	Por medio del método del inciso a) al resolver el sistema de ecuaciones se obtiene el siguiente resultado.	$A = \frac{1}{4}, B = -\frac{1}{4}, c = 0$
3.	Se sustituyen en la función original y ya es posible trasforma inversamente las funciones resultantes.	$\mathcal{L}^{-1}\{f(t)\} = \frac{1}{4} * \frac{1}{s} - \frac{1}{4} * \frac{s}{s^2+4}$ $\mathcal{L}^{-1}\{f(t)\} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} Cos[2t]$

R./ $\mathcal{L}^{-1}\{f(t)\} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} Cos[2t]$

Universidad de San Carlos de Guatemala **Departamento de Matemática**
Facultad de Ingeniería **Matemática Aplicada 1**

Tema 4: (30 Puntos)
Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $y' - y = 2Cos5t, \qquad y(0) = 0$

No	EXPLICACION	OPERATORIA
1.	Se deben realizar las transformadas de Laplace de cada miembro de la ecuación recordando la forma estándar de la transformada de la primera derivada.	$\mathcal{L}\{y'\} = sF(s) - F(0)$ $sF(s) - F(0) - F(s) = \frac{2s}{s^2+25}$
2.	Se factoriza el primer miembro y se pasa a dividir al segundo.	$F(s)(s-1) = \frac{2s}{s^2+25}$ $F(s) = \frac{2s}{(s^2+25)(s-1)}$
3.	Se separa en fracciones parciales	$\frac{A}{s-1} + \frac{Bs+c}{s^2+25} = \frac{2s}{(s^2+25)(s-1)}$
4.	Al resolver el sistema de ecuaciones que esto produce se obtienen los siguientes valores.	$A = \frac{1}{13}, B = -\frac{1}{13}, C = \frac{25}{13}$
5.	Se sustituyen en la función original y se transforman inversamente.	$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{13} * \frac{1}{s-1} - \frac{1}{13} * \frac{s}{s^2+25} + \frac{25}{13} * \frac{1}{s^2+25}$
6.	Finalmente	$f(t) = \frac{1}{13}e^t - \frac{1}{13}Cos[5t] + \frac{5}{13}Sin[5t]$

R./

$$f(t) = \frac{1}{13}e^t - \frac{1}{13}Cos[5t] + \frac{5}{13}Sin[5t]$$

b) $y'' + 9y = e^{4t}$ $y(0) = 0$ $y'(0) = 0$

No	EXPLICACION	OPERATORIA
1.	Se deben realizar las transformadas de Laplace de cada miembro de la ecuación recordando la forma estándar de la transformada de la segunda derivada.	$\mathcal{L}\{y'\} = s^2F(s) - sF(0) - f'(0)$ $s^2F(s) - sF(0) - F'(0) + 9sF(s) = \frac{1}{s-4}$
2.	Se factoriza el primer miembro y se pasa a dividir al segundo.	$F(s)(s^2+9s) = \frac{1}{s-4}$ $F(s) = \frac{1}{(s-4)((s^2+9s))} = \frac{1}{s(s-4)(s+9)}$
3.	Se separa en fracciones parciales	$\frac{A}{s} + \frac{B}{s-4} + \frac{C}{s+9} = \frac{1}{s(s-4)(s+9)}$
4.	Al resolver el sistema de ecuaciones que esto produce se obtienen los siguientes valores.	$A = -\frac{1}{36}, B = \frac{1}{52}, C = \frac{1}{117}$
5.	Se sustituyen en la función original y se transforman inversamente.	$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = -\frac{1}{36} * \frac{1}{s} + \frac{1}{52} * \frac{1}{s-4} + \frac{1}{117} * \frac{1}{s+9}$
6.	Finalmente	$f(t) = -\frac{1}{36} + \frac{1}{52}e^{4t} + \frac{1}{117}e^{-9t}$

$$R./$$
$$f(t) = -\frac{1}{36} + \frac{1}{52}e^{4t} + \frac{1}{117}e^{-9t}$$