UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-118-1-V-1-00-2017

CURSO:	**Matemática Aplicada 1**
SEMESTRE:	**Primer**
CÓDIGO DEL CURSO:	**118**
TIPO DE EXAMEN:	**Primer parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**Febrero de 2017**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**José Carlos Orozco de León**
REVISÓ EL EXAMEN:	**Ing. Douglas Kenedy Román**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

Universidad de San Carlos de Guatemala **Departamento de Matemática**
Facultad de Ingeniería **Matemática Aplicada 1**

Febrero de 2017 Primer parcial

NOTA: El examen se realiza durante el período de clase y tiene duración de 50 minutos.

Tema 1: 20 puntos.
Obtenga F(S) usando la transformada de Laplace POR DEFINICIÓN, si:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & sí \quad 0 \leq t < 3 \\ e^{-2t} & sí \quad t \geq 3 \end{cases}$$

Tema 2: 20 puntos.

A) Obtenga f(t) sí:
$f(t) = t^3 e^{-2t}$

B) Obtenga f(t) sí:
$$F(s) = \frac{1}{s^3} + \frac{s+4}{s^2+9} - \frac{2}{s+4}$$

Tema 3: 30 puntos.
Usando la Transformada de Laplace, obtenga la solución de la ecuación diferencial con condiciones iniciales.

$$y'' - 9y = e^t \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

Tema 4: 30 puntos.

A) Obtenga f(t) sí:
$$F(s) = \frac{3s+1}{s^2-2s+5}$$

B) Obtenga F(s) sí:
$f(t) = (t^2 - 2) \cdot u(t-2)$

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema 1: 20 puntos

No.	Explicación	Operatoria
1.	La integral a utilizar es la siguiente	$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\lim_{b\to\infty} e^{-st}\int_0^\infty f(t)dt$
2.	Se procede a plantear la integral a utilizar, tomando en cuenta las condiciones iniciales	$\mathrm{F(s)}=\int_0^3 e^{-st}(0)+\int_3^\infty e^{-st}e^{-2t}dt$ $\mathrm{F(s)}=\lim_{b\to\infty}\int_3^b e^{-st}e^{-2t}dt$
3.	Simplificando las integrales y operando factor común en el exponente, se obtiene la siguiente integral	$\mathrm{F(s)}=\lim_{b\to\infty}\int_3^b e^{-t(s+2)}dt$
4.	Integrando la función obtenemos	$\mathrm{F(s)}=\lim_{b\to\infty}-\frac{e^{-t(s+2)}}{(s+2)}$
5.	Integrales valuadas en los límites de 3 a ∞	$F(s)=\frac{-e^{-\infty(s+2)}}{s+2}+\frac{e^{-3(s+2)}}{s+2}$
6.	**Respuesta**	$\boldsymbol{F(s)=\frac{e^{-3(s+2)}}{s+2}}$

Universidad de San Carlos de Guatemala **Departamento de Matemática**
Facultad de Ingeniería **Matemática Aplicada 1**

Tema 2: 20 puntos

INCISO A (10 puntos)

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se procede a operar la transformada de Laplace a la función	$f(t) = t^3 e^{-2t}$ $\mathrm{L}\{t^3\}_{s\to(s+2)}$
2.	La transformada de Laplace cuando $s \to (s+2)$ para la función es	$\mathrm{F(s)} = \frac{3!}{s^4}$
3.	**Respuesta**	$\boldsymbol{F(s) = \frac{6}{(s+2)^4}}$

INCISO B (10 puntos)

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se plantea la transformada de Laplace para cada parte de la función	$f(t) = L\left\{\frac{1}{s^3}\right\} + L\left\{\frac{s+4}{s^2+9}\right\} - 2L\left\{\frac{1}{s+4}\right\}$ $f(t) = L\left\{\frac{1}{s^3}\right\} + L\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} + L\left\{\frac{4}{s^2+9}\right\} - 2L\left\{\frac{1}{s+4}\right\}$
2.	Se obtiene la transformada de Laplace para cada término, se está operando cada término por aparte y donde sea necesario se hace una completación en el numerador.	$f(t) = L\left\{\frac{1}{s^3}\right\} = \left\{\frac{2}{2s^3}\right\} \to \frac{t^2}{2}$ $f(t) = L\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} \quad \sqrt{9} = 3 \to cos3t$ $f(t) = L\left\{\frac{4}{s^2+9}\right\} = \frac{4\cdot 3}{3(s^2+9)} = \frac{4}{3}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\} \to \frac{4}{3}sen3t$ $f(t) = -2L\left\{\frac{1}{s+4}\right\} \to -2e^{-4t}$
3.	**Respuesta**	$\boldsymbol{f(t) = \frac{t^2}{2} + cos3t + \frac{4}{3}sen3t - 2e^{-4t}}$

Tema 3: 30 puntos

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se opera la transformada de Laplace a la ecuación diferencial Se utilizan las condiciones iniciales del problema	$L\{y''\} - 9L\{y\} = L\{e^t\}$ $s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 9y(s) = \frac{1}{s-1}$ $s^2Y(s) - 9y(s) = \frac{1}{s-1}$
2.	Se despeja el término Y(s)	$Y(s)(s^2-9) = \frac{1}{s-1}$ $Y(s) = \frac{1}{(s-1)(s^2-9)}$
3.	Se trabaja por medio de fracciones parciales y se obtienen los resultados para cada fracción parcial	$= \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2-9}$ $A = -\frac{1}{8} \qquad B = \frac{1}{8} \qquad C = \frac{1}{8}$
4.	Se sustituye el valor encontrado en las fracciones parciales en cada expresión, para poder aplicar la transformada de Laplace	$-\frac{1/8}{s-1} + \frac{1/8s}{s^2-9} + \frac{1/8}{s^2-9}$ $-\frac{1}{8}L\left(\frac{1}{s-1}\right) + \frac{1}{8}L\left(\frac{s}{s^2-9}\right) + \frac{1}{8\cdot 3}L\left(\frac{1\cdot 3}{s^2-9}\right)$
5.	**Respuesta**	$\boldsymbol{= -\frac{1}{8}e^t + \frac{1}{8}cosh3t + \frac{1}{24}senh3t}$

Tema 4: 20 puntos.

INCISO A (10 puntos)

No	EXPLICACIÓN	OPERATORIA
1	Se descompone el denominador, completando cuadrados	$s^2-2s+5=\ s^2-2s+1+5-1$ $=(s-1)^2+4$
2	Se procede a descomponer el numerador y formar una nueva expresión, de tal manera que obtengamos la misma expresión (s-1) en el numerador y en el denominador	$=\dfrac{3(s+1-1)+1}{(s-1)^2+4}$ $=\dfrac{3(s-1)+4}{(s-1)^2+4}$
3	Se separa cada expresión, se plantea y se da solución a la transformada de Laplace	$=3L\left\{\dfrac{s-1}{(s-1)^2+4}\right\}+4L\left\{\dfrac{1}{(s-1)^2+4}\right\}$ $=3L\left\{\dfrac{s}{s^2+4}\right\}_{s\to s-1}+\dfrac{4L}{2}\left\{\dfrac{1\cdot 2}{s^2+4}\right\}_{s\to s-1}$
4	**Respuesta**	$\boldsymbol{f(t)=3e^t cos2t+2e^t sen2t}$

INCISO B (10 puntos)

No.	Explicación	Operación
1	El teorema a utilizar es el siguiente	$L\{f(t)U(t-a)\} = e^{-as}L\{f(t+a)\}$
2	Se procede a operar el ejercicio con el teorema dado	$L\{t^2U(t-2) - 2U(t-2)\}$ $L\{(t+2)^2\}e^{-2s} - 2L\{1\}e^{-2s}$
3	Se opera el producto notable, para poder aplicar la transformada de Laplace	$L\{t^2+4t+4\}e^{-2s} - 2\left(\frac{1}{s}\right)e^{-2s}$
4	Los resultados obtenidos al operar la transformada de Laplace	$\left(\frac{2}{s^3}+\frac{4}{s^2}+\frac{4}{s}\right)e^{-2s} - \frac{2}{s}e^{-2s}$
3	**Respuesta**	$= \boldsymbol{\left(\frac{2}{s^3}+\frac{4}{s^2}+\frac{2}{s}\right)e^{-2s}}$